

DARIO SANCHEZ VICKERS

INGENIERO CONSULTOR

Ecuaciones de deformaciones combinadas de Corte y Flexión para cálculo de Estructuras

INTRODUCCION

Los ingenieros disponemos de una técnica de cálculo basada en las deformaciones causadas por la flexión. Esa técnica, que con justicia puede estimarse muy completa, corresponde a tipos esbeltos de elementos estructurales, tales como los que encontramos en las columnas y vigas de construcciones metálicas o bien en hormigón armado para edificios industriales que sirven de cubierta a espacios medianos o grandes. Sin duda que para éstos son suficientemente exactas las fórmulas de "Slope Deflection" y sus sistemas derivados tales como el método de Cross, el de los grados de empotramiento y otros.

Pero es bien distinto el caso general del edificio pesado, como el de oficinas y departamentos. Las fuerzas horizontales que para ellos hay que considerar por la acción de los temblores son mucho mayores en relación a sus elementos resistentes disponibles. En tal caso, hay que aprovechar los muros, las fachadas y los pilastrones que puedan colocarse sin perjuicio del diseño arquitectónico. Todos esos elementos deben ser aprovechados para darle rigidez al edificio; su cálculo con las fórmulas que sólo toman en cuenta las deformaciones de flexión, no son aplicables sin cometer errores importantes.

Otro aspecto que salta a la vista del diseñador de hormigón armado es el de no despreciar la importancia de los nudos rígidos que se forman en las cruces de vigas y columnas. En realidad, disponemos de abacos que dan las rigideces y Carryover de vigas de rigidez infinita en las zonas extremas de ellos. Sin embargo, he querido ampliar el estudio y obtener las fórmulas pertinentes que toman en cuenta la indeformabilidad de los nudos.

El cálculo de la acción de las flechas y deformaciones causadas por el corte es tan antiguo como las equivalentes de flexión pura; pero hasta ahora no se dispone de un conjunto de fórmulas generales y un método de cálculo que incluya la acción combinada de ambas deformaciones, salvo aplicaciones muy especiales tales como las indicadas en la obra de Evans, copiada en un Boletín de la Portland Cement Asoc. y un estudio publicado por Floris en la Revista Beton Eisen en 1939.

Como muchos de mis colegas, he sentido la necesidad de disponer de un conjunto de fórmulas completas de deformaciones. Atendiendo a este apremio he desarrollado las ecuaciones generales de "Slope Deflection" que sirven de base a un procedimiento de Cálculo que tendré el agrado de exponer a Uds. en una segunda o tercera conferencia que podrá celebrarse dentro de algunos meses.

PRIMERA PARTE

ECUACIONES DE "SLOPE DEFLECTION" CONSIDERANDO LAS DEFORMACIONES DE CORTE

La deformación que la fuerza de corte produce en una viga con apoyos a nivel y sin cargas en el tramo, tiende a disminuir los momentos que producen los giros de la elástica en los apoyos. Su acción en las ecuaciones de deformación es equivalente a que el apoyo derecho $[b]$ baje cuando los giros de las caras $[a]$ y $[b]$ son positivos.

El corte originado en la viga que gira θ_a y θ_b en sus extremos respectivos, vale $b E K (\theta_a + \theta_b)$ pero al deformarse el corte se producen desligamientos de sus fibras que valen $\Delta_c = + \frac{3 L}{A E} \times \text{Corte}$. Como ahora el corte $= \frac{6 E K}{L}$

$\left(\theta_a + \theta_b - \frac{2 \Delta_c}{L}\right)$ tendremos:

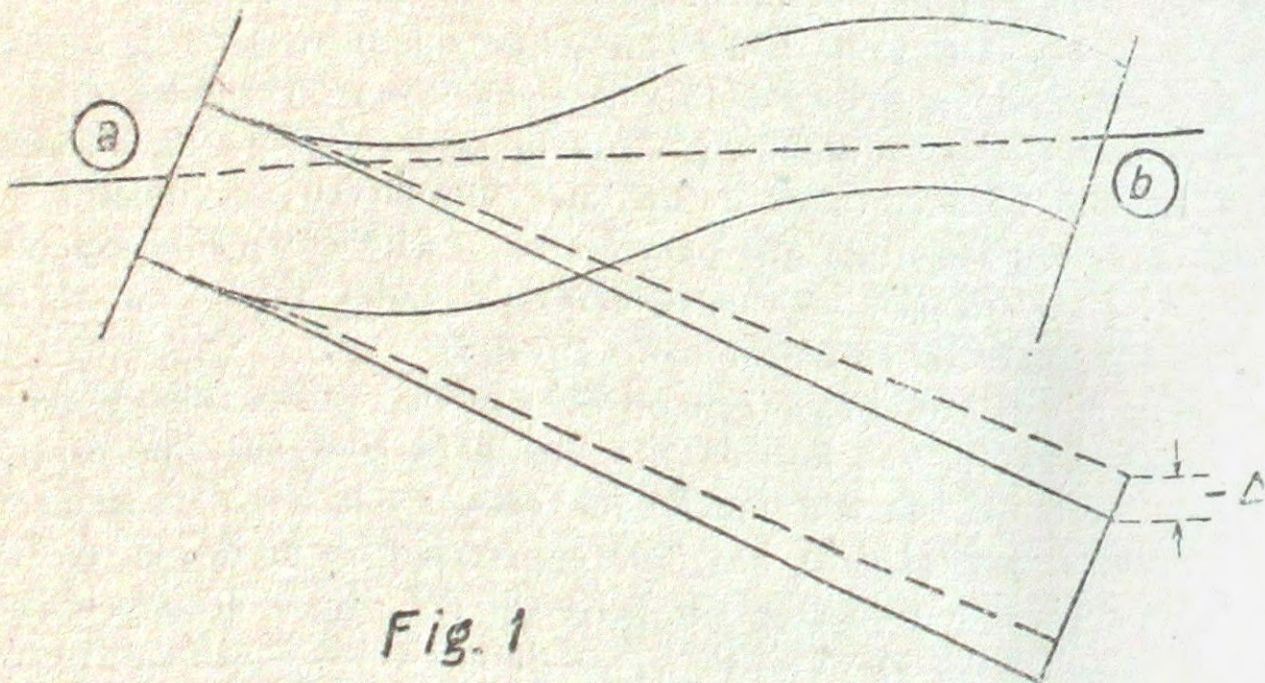


Fig. 1

$$1) \quad \Delta_c = \frac{3 L}{A E} \times \frac{6 E K}{L} \left(\theta_a + \theta_b - \frac{2 \Delta_c}{L}\right)$$

y despegando

$$2) \quad \Delta_c = \frac{18 K}{A L + 36 K} (\theta_a + \theta_b)$$

Introduciendo este valor de Δ_c en la ecuación de "Slope Deflection":

$$3) \quad M_{ab} = 2 E K \left[\left(2 - \frac{54 K}{A L + 36 K}\right) \theta_a + \left(1 - \frac{54 K}{A L + 36 K}\right) \theta_b \right]$$

que puede escribirse como sigue:

$$4) \quad M_{ab} = 2 E K \left[2 \frac{A L + 9 K}{A L + 36 K} \cdot \theta_a + \frac{A L - 18 K}{A L + 36 K} \cdot \theta_b \right]$$

Aplicación de la fórmula 3):

$$I = 0,0333 \text{ m}^4$$

$$L = 2,00 \text{ m.}$$

$$A = 0,33 \text{ m}^2$$

$$\frac{54 \times 0,033}{0,33 \times 2,00^2 + 36 \times 0,0333} = \frac{1,8}{1,32 + 1,2} = 0,712$$

$$M_{ab} = 2 E K \left[(2 - 0,712) \theta_a + (1 - 0,712) \theta_b \right]$$

$$= 2 E K (1,29 \theta_a + 0,29 \theta_b)$$

Esta relación demuestra la ventaja de considerar las deformaciones de corte al usar el Método de Cross, pues la acción del giro de la cara lejana es reducida por la deformabilidad al corte de la viga —en este caso, el coeficiente de θ_b en vez de ser uno se redujo a 0,29—. El coeficiente de traspaso pasó de $1/2$ a $0,29/1,29 = 0,225$, para este caso.

Introduciendo las relaciones

$$\begin{cases} A = e' b d \\ I = e'' \frac{b d^3}{12} \end{cases}$$

5)

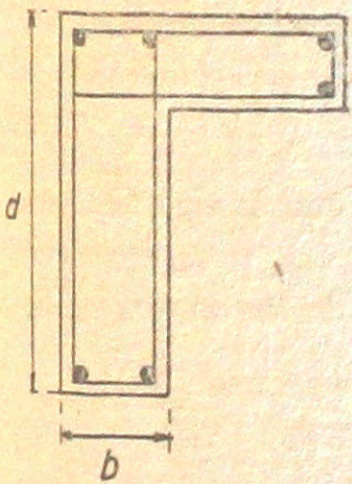


Fig. 3

e' y e'' se pueden definir como sigue:

e' es el factor por el cual hay que multiplicar el ancho del nervio por la altura de la pieza para obtener la sección rectangular que dé una deformación al corte equivalente al de la pieza considerada.

e'' es el factor por el cual hay que multiplicar el momento de inercia proporcionado por la sección rectangular cuyo ancho y altura sea igual al ancho del nervio y a la altura de la pieza considerada, para obtener el momento de inercia equivalente.

Los factores e' y e'' relacionan el ancho del nervio y altura de la pieza con: a) las formas y armaduras de la viga; b) la distribución de las fatigas internas.

Introduciendo e' y e'' se obtiene:

$$6) M_{ab} = 2 E K \left[\left(2 - \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{d} \right)^2} \right) \theta_a + \left(1 - \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{d} \right)^2} \right) \theta_b \right]$$

Nótese que a medida que crece la relación $\frac{L}{d}$ tiende a desaparecer el término

$$\frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{d} \right)^2}$$

que representa la influencia de la deformación al corte.

Los coeficientes e' y e'' pueden calcularse fácilmente. e'' puede tomarse de las tablas que aparecen en diversos textos.

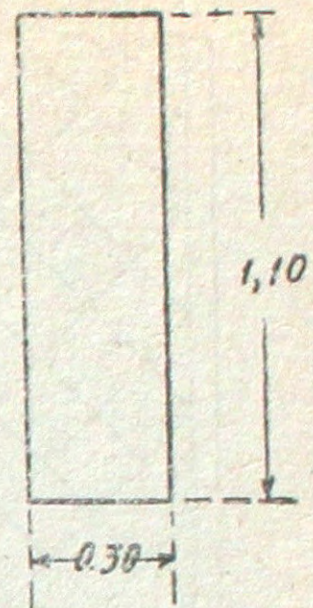


Fig. 2

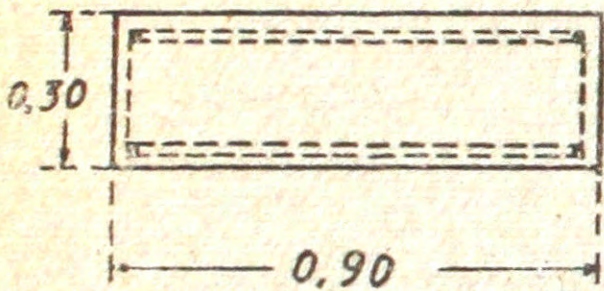
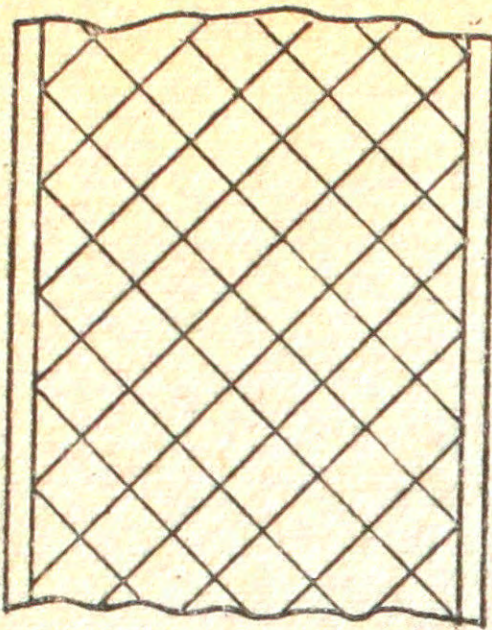


Fig. 4

Ejemplo: Columna de 0.30×0.90 m. armada con doble malla de fierros de $5/8''$ a 45° , a 0.16.

Sección armadura:

$$\frac{2 \times 2 \times 4 \frac{5}{8} \times \cos 45^\circ \times (15 - 1) \frac{E_{\text{flex}}}{E_{\text{corte}}}}{0.4} = 0.078$$

Sección hormigón:

$$\frac{0.30 \times 0.90}{0.348} = 0.270$$

$$e' = \frac{0.348}{0.270} = 1.30 \quad E_{\text{flex}} = E_{\text{compresión}}$$

$$e'' = 1.$$

En caso de piezas fuertemente armadas a la flexión el valor de e'' se calculará empleando la sección "homogenizada".

Consideremos, ahora, que la viga tiene sus extremos fijos en los ángulos Θ_a y Θ_b y sometámosla a un desplazamiento de los apoyos Δ . Se

originan nuevos momentos $[M_{ab}]_\Delta$ y $[M_{ba}]_\Delta$ cuyos valores serán

$$7) \quad [M_{ab}]_\Delta = 2 E K \left[-3 \frac{\Delta - \Delta_c}{L} \right]$$

llamando Δ_c la deformación debida al esfuerzo de corte $[H]_\Delta$ que sufre la viga por el movimiento Δ .

$$[M_{ab}]_\Delta = [M_{ba}]_\Delta = -6 E K \left[\frac{I}{L} \left\langle \Delta - \frac{3 L}{E A} \left(-[H]_\Delta \right) \right\rangle \right]$$

y el corte

$$8) \quad [H]_\Delta = \frac{-12 E K}{L^2} \left(\Delta + \frac{3 L}{E A} [H]_\Delta \right)$$

$$[H]_\Delta \left(1 + \frac{36 K}{A L} \right) = \frac{-12 E K}{L^2} \cdot \Delta$$

$$1 + \frac{36 K}{A L} = 1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \quad \text{porque } K = \frac{I}{L} \quad I = e'' \frac{b h^3}{12} \quad A = e' b d.$$

$$[H]_{\Delta} \left\langle 1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right\rangle = - \frac{12 E \cdot e'' \frac{b h^3}{12}}{L^3} \cdot \Delta = \frac{E \cdot A e'' h^2}{e' L^2} \frac{\Delta}{L}$$

$$[H]_{\Delta} = - \frac{E A}{\frac{e' \left(\frac{L}{h} \right)^2}{1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2}} \frac{\Delta/L}{1}$$

Obteniendo casi la importante relación

$$9) \quad [H]_{\Delta} = - \frac{E A}{L} \frac{\Delta}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2}$$

que corresponde a la fuerza cortante que produce un desplazamiento Δ entre las caras extremas de la viga que están fijas respecto a rotaciones.

Reemplazando este valor de $[H]_{\Delta}$ en las ecuaciones de momentos obtendremos:

$$[M_{ab}]_{\Delta} = - 6 E K \frac{I}{L} \left\langle \Delta + \frac{3 L}{E A} \times \left(- \frac{E A}{L} \frac{\Delta}{3 \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \right) \right\rangle$$

$$= \frac{6 E K}{L} \cdot \frac{\Delta}{1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2}$$

o lo que es lo mismo, si se quiere considerar las deformaciones de corte, en vez de anotar Δ en la ecuación de "Slope Deflection" se anotarรก:

$$11) \quad \frac{\Delta}{1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2}$$

Deberรก tomarse nota que las relaciones $\frac{e''}{e'}$ y $\frac{h}{L}$ aquđ aparecen invertidas con respecto a las del resto del texto.

Para evitar el empleo de f6rmulas parecidas con relaciones invertidas, es mejor reemplazar los valores de $\frac{6 E K}{L}$ por su equivalente.

$$\frac{6 E K}{L} = 6 E \frac{e'' \frac{b h^3}{12}}{L^2} = \frac{1}{2} E \frac{A}{\frac{e' \left(\frac{L}{h} \right)^2}{e'' \left(\frac{h}{L} \right)^2}} \quad [F]$$

$$[M_{ab}]_{\Delta} = - \frac{1}{2} E \frac{A}{\frac{e' \left(\frac{L}{h} \right)^2}{e'' \left(\frac{h}{L} \right)^2}} \frac{\Delta}{1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2}$$

$$12) \quad [M_{ab}]_{\Delta} = \frac{1}{2} E A \Delta \frac{1}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \quad [F L]$$

Si sobreponemos la acción de desnivelación de apoyos a la acción de giros de las caras extremas, obtendremos la ecuación general de "Slope Deflection".

$$13) \quad M_{ab} = K \left[\left(2 - \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \right) 2 E \theta_a + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \right) 2 E \theta_b \right] \\ - \frac{1}{2} E A \Delta \frac{1}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2}$$

Haciendo:

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_a = 2 E \theta_a \quad \psi_b = 2 E \theta_b \\ \xi_o = \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \quad \delta = \frac{1}{9} E \Delta \end{array} \right.$$

Obtenemos:

$$15) \quad M_{ab} = K \left[(2 - \xi_o) \psi_a + (1 - \xi_o) \psi_b \right] \quad \xi_o, A \delta \text{ y}$$

$$16) \quad M_{aq} = \frac{K}{L} (3 - 2 \xi_o) (\psi_a + \psi_b) - 2 \xi_o A \frac{\delta}{L}$$

SIGNOS:

Se han designado por M_{ab} y M_{ba} los momentos exteriores en los extremos $\overline{[a]}$ y $\overline{[b]}$ de las vigas. Se consideran como positivos cuando actúan en el sentido de movimiento de los punteros del reloj. Los ángulos de giro θ_a y θ_b y en consecuencia, ψ_a y ψ_b son positivos cuando giran en el sentido de los punteros del reloj. Los desniveles Δ y, en consecuencia, los δ son positivos cuando el eje de la pieza $\overline{[a]} - \overline{[b]}$ gira como los punteros del reloj.

De lo anterior se deduce que si el apoyo $\overline{[b]}$ baja respecto a $\overline{[a]}$ se originan momentos negativos en los apoyos $\overline{[a]}$ y $\overline{[b]}$ (ecuación 9) y el esfuerzo de corte que produce ese momento positivo del apoyo $\overline{[b]}$ es de signo menos, al revés de la convención habitual.

Es útil considerar el H de la fórmula 9) como fuerza exterior aplicada en el punto de inflexión de la viga o columna. Si ella acciona la pieza en sentido contrario a los punteros del reloj, resulta positiva.

Si se examina atentamente el signo del esfuerzo constante y se recuerda que éste es una acción "interior" se explica que por tener esta condición de ser fuerza interior, el signo de ella es contrario a la del sistema de fuerzas "exteriores" que actúan sobre la pieza considerada. A mi juicio esta reflexión sirve para disipar esa aparente anomalía.

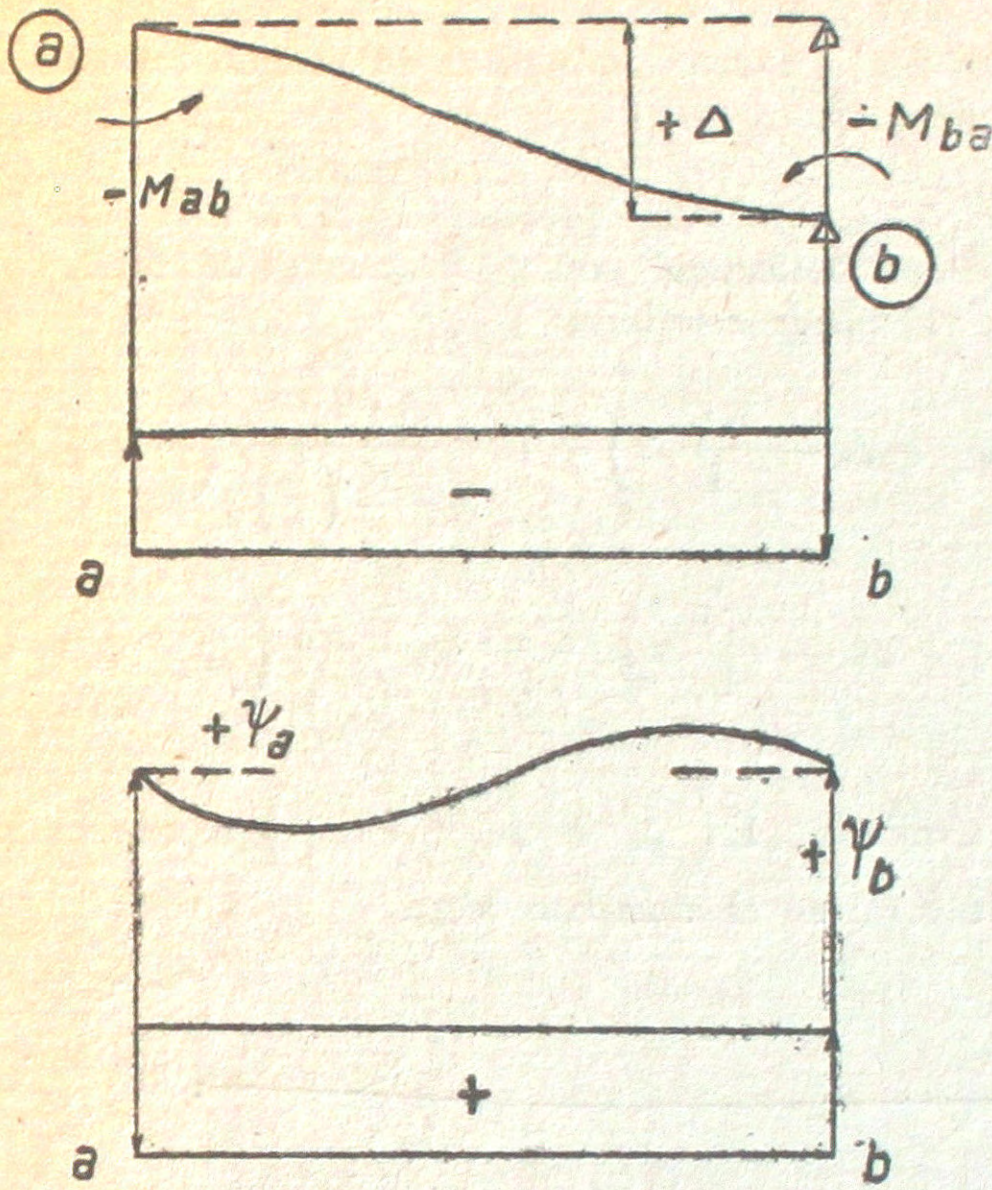


Fig. 5

Si se deseara mantener la unidad de signos de la convención general de momentos, giros y desplazamientos habrá que cambiar signos en las ecuaciones 9, 15 y 16, lo que presenta algunos inconvenientes.

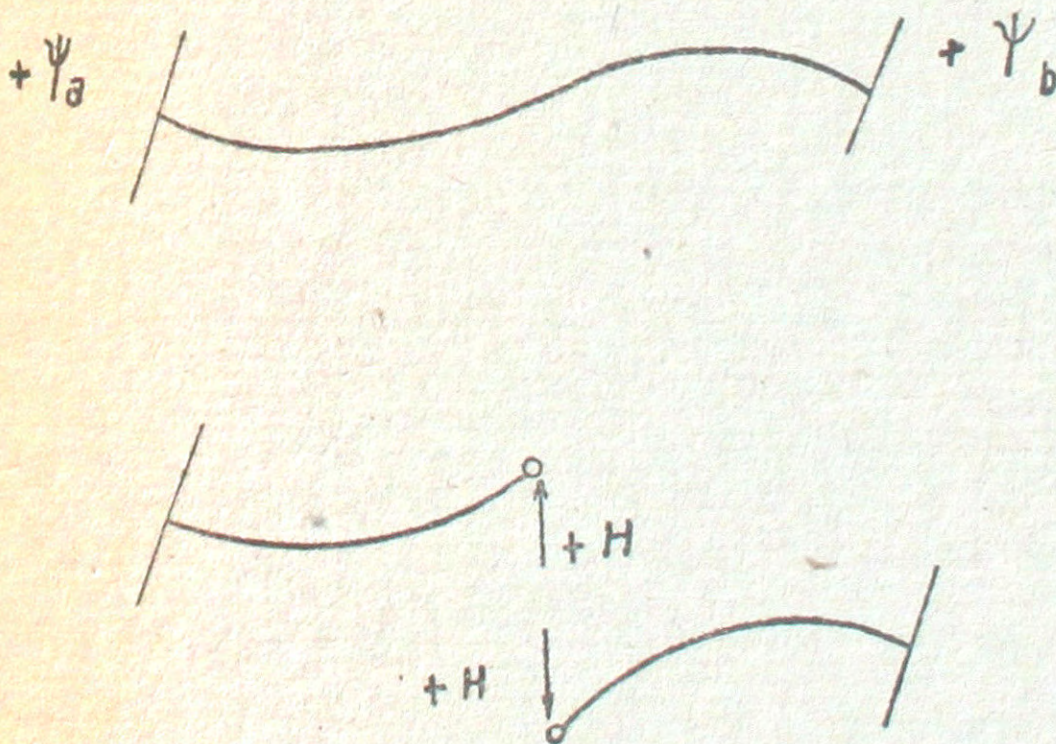


Fig. 6

Sin embargo, es más útil considerar H como fuerza exterior. Entonces deberá darse signo $+$ cuando ella acciona la pieza en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj.

Para mayor claridad conviene precisar las diferencias entre los términos de la ecuación de "Slope Deflection" con y sin acciones de corte.

La ecuación 13 puede escribirse:

$$M_{ab} = K \left(2 \psi_a + \psi_b - \frac{6F}{L} \Delta \right) - K \frac{4.5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} (\psi_a + \psi_b) - \frac{18 \Delta / L}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{d} \right)^2}$$

$$= K \left(2 \psi_a + \psi_b - \frac{6E}{L} \Delta \right) - \frac{4.5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \left(\psi_a + \psi_b - 4E \frac{\Delta}{L} \right)$$

El segundo término: $\xi_0 K \left(\psi_a + \psi_b - 4E \frac{\Delta}{L} \right)$ representa la acción de las deformaciones de corte en el momento M_{ab} .

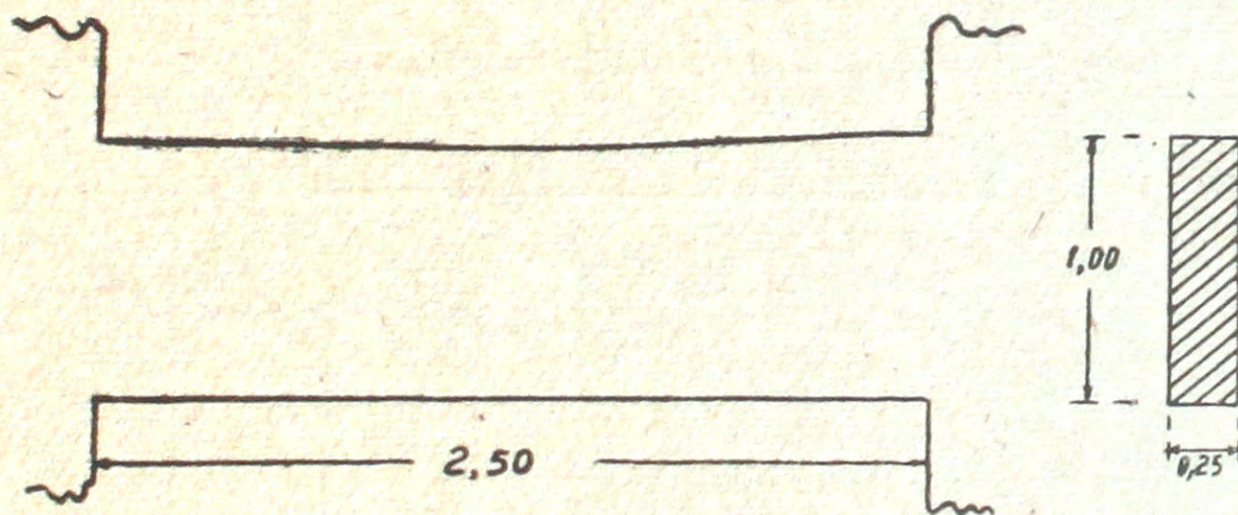


Fig 7

Ejemplo:

$$A = 0.25 \text{ m}^2$$

$$e' = 1$$

$$I = 0.0207 \text{ m}^4$$

$$e'' = I$$

$$K = \frac{0.0207}{2.50} = 0.00833$$

$$\frac{4.5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} = \frac{4.5}{3 + 1 \times 6.25}$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$$

$$\xi_0 = 0.487$$

$$\Delta = + 1 \text{ cm.} = + 0.01 \text{ m.}$$

$$\frac{6E}{L} \Delta = 6 \times 2.1 \times 10^6 \times \frac{0.01}{2.50} = 50.4 \times 10^3$$

$$\theta_a = 0.004 \text{ radianes}$$

$$\theta_b = 0.002$$

$$\psi_a = 2 \times 2.1 \times 10^6 \times 0.004 = 16.8 \times 10^3$$

$$\psi_b = 8.4 \times 10^3$$

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= 8.333 \times 10^{-3} (2 \times 16.8 + 8.4 - 50.4) \times 10^{+3} - \\
 &- 8.333 \times 10^{-3} \times 0.487 (16.8 + 8.4 - 33.6) \times 10^{+3} \\
 &= -70.00 + 34.09 = -35.91 \text{ m/ton.}
 \end{aligned}$$

Al no incluir las deformaciones de corte se comete para éste caso errores de orden de 100%.

Si no hubiera existido el movimiento hacia abajo del apoyo derecho, $\Delta = 0,000$, entonces

$$M_{ab} = +349.97 - 102.27 = +247.70 \text{ m/ton.}$$

hemos obtenido una diferencia de 41.6% en exceso.

Si la luz libre de esa fuerza fuera 5,00 m. en vez de 2,50 obtendríamos:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= 4.166 \times 10^{-3} (2 \times 16.8 + 8.4 - 25.2) \times 10^{+3} - \\
 &- 4.166 \times 10^{-3} \frac{4.5}{3 + 1 \times 5^2} (16.8 + 8.4 - 16.6) \times 10^3 \\
 &= +69.99 - 5.73 = 64.26 \text{ m/ton.}
 \end{aligned}$$

El error sería en este caso de 8,9% en exceso. Si no hubiese descenso de apoyos, el error sería de 10,8 % en exceso.

APLICACIONES PARA VIGAS QUE ARRANCAN DE COLUMNAS ANCHAS

Al girar los cabezales y los pies de las columnas bajo la acción de las cargas horizontales, el ancho de las columnas o vigas, según el caso, es de importancia. Al afecto; el giro ψ_a produce un desnivel hacia abajo de la cara de la viga que vale $\frac{d_a}{2} \cdot \theta_a = \frac{d_a}{2} \cdot \frac{\psi_a}{2E}$ y en el otro extremo $\frac{d_b}{2} \cdot \theta_b = \frac{d_b}{4E} \psi_b$ ambos de signo negativo por cuanto cambian la posición de los arranques de las vigas moviendo su eje en sentido contrario a la marcha de los punteros del reloj.

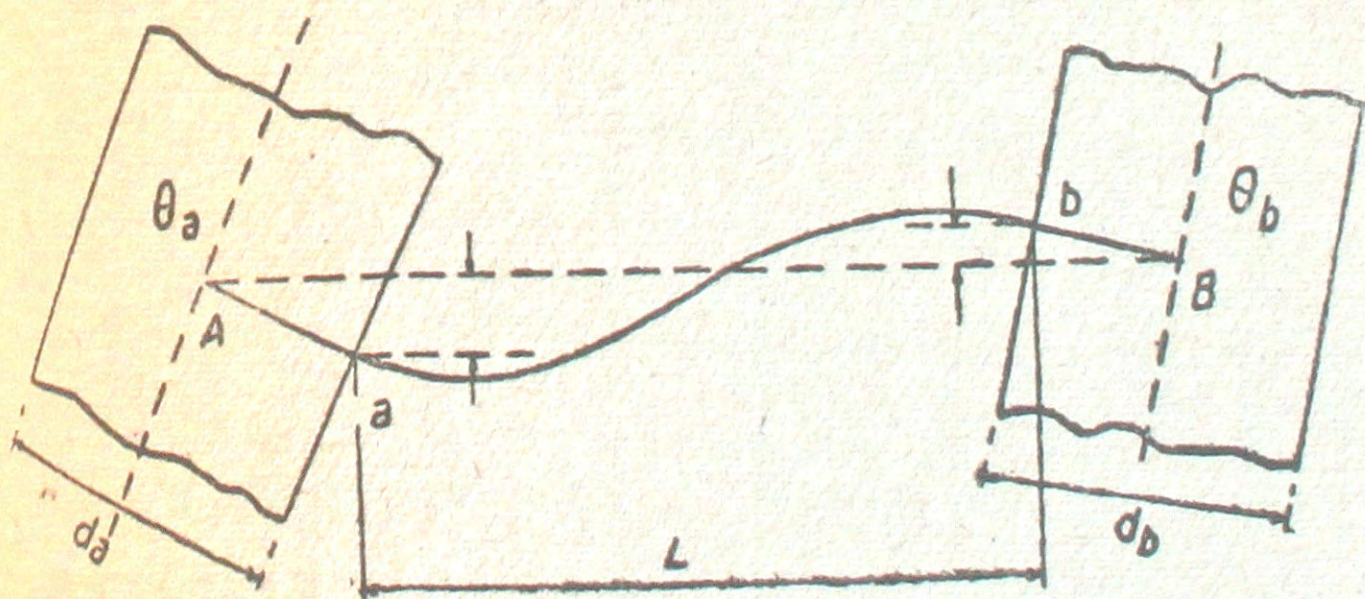


Fig. 8

Aplicando esos movimientos a la ecuación 12):

$$\begin{aligned} \left[M_{ab} \right]_{\Delta} &= -\frac{1}{2} E A \Delta \frac{1}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} = +\frac{1}{2} E A \frac{1}{4 E} \left(d_a \psi_a + d_b \psi_b \right) \frac{1}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \\ &= +\frac{\xi_0}{36} A (d_a \psi_a + d_b \psi_b) \text{ y tomando en cuenta} \end{aligned}$$

que $\frac{A}{K} = \frac{e' b h}{e'' \frac{b h^3}{12 L}} = 12 \frac{e'}{e''} \frac{L}{h^2}$ queda

$$\frac{\xi_0}{36} \frac{A}{K} (d_a \psi_a + d_b \psi_b) = \frac{\xi_0}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h^2} (d_a \psi_a + d_b \psi_b)$$

y la ecuación h') toma la forma

$$\begin{aligned} 17) \quad M_{ab} &= K \left[\left\langle 2 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{d_a}{h} \right) \right\rangle \psi_a + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle 1 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{d_b}{h} \right) \right\rangle \psi_b \right] - \xi_0 A \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18) \quad M_{ba} &= K \left[\left\langle 2 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \frac{d_b}{h} \right) \right\rangle \psi_b + \left\langle 1 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \cdot \frac{d_a}{h} \right) \right\rangle \psi_a \right] \\ &\quad - \xi_0 A \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19) \quad H_{ab} &= + \frac{K}{L} \left[\left\langle 3 - 2 \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \cdot \frac{d_a}{h} \right) \right\rangle \psi_a + \right. \\ &\quad \left. \left\langle 3 - 2 \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \frac{d_b}{h} \right) \right\rangle \psi_b \right] - 2 \xi_0 \frac{A}{L} \cdot \delta \end{aligned}$$

$$20) \quad H_{ab} = + \frac{K}{L} \left[\left\langle 3 - 2 \xi_0 \right\rangle (\psi_a + \psi_b) + \frac{2}{3} \xi_0 \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \left(\frac{d_a}{h} \cdot \psi_a + \frac{d_b}{h} \psi_a \right) \right] - 2 \xi_0 \frac{A}{L} \cdot \delta$$

Nótese que M_{ba} es el momento en el arranque de la viga, no es el momento reducido a la intersección de ejes de columnas con vigas.

Llamemos a_a y a_b los términos

$$21) \quad \begin{cases} a_a = 1 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \cdot \frac{d_a}{h} \right) \\ a_b = 1 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \cdot \frac{d_b}{h} \right) \end{cases}$$

entonces podemos escribir

$$22) \begin{cases} M_{ab} = K \left[(1 + a_a) \psi_a + d_b \psi_b \right] - \xi_0 A \delta \\ M_{ba} = K \left[a_a \psi_a + (1 + a_b) \psi_b \right] - \xi_0 A \delta \\ H_{ab} = + \frac{K}{L} \left[(1 + 2 a_a) \psi_a + (1 + 2 a_b) \psi_b \right] - 2 \xi_0 A \frac{\delta}{L} \end{cases}$$

Si llamamos γ_a la distancia entre el punto de inflexión de la elástica de la viga y el punto de arranque $\overline{[a]}$, tenemos

$$23) \gamma_a = \frac{M_{ab}}{M_{ab}} = + L \frac{(1 + a_a) \psi_a + a_b \psi_b - \xi_0 A \delta / K}{(1 + 2 a_a) \psi_a + (1 + 2 a_b) \psi_b - 2 \xi_0 A \delta / K}$$

$$24) = + L \left[1 - \frac{a_a \psi_a + (1 + a_b) \psi_b - \xi_0 A \delta / K}{(1 + 2 a_a) \psi_a + (1 + 2 a_b) \psi_b - 2 \xi_0 A \delta / K} \right]$$

Si existe sólo desnivel entre los caras, sin giros de las caras extremas

$$\begin{bmatrix} \gamma_a \\ \delta \end{bmatrix} \begin{cases} \psi_a = \psi_b = 0 \\ \delta \end{cases} = + \frac{1}{2} L$$

como era de esperarlo.

A igual resultado se llega si los anchos de las columnas son iguales, para giros iguales de las caras $\overline{[a]}$ y $\overline{[b]}$ o bien de los centros $\overline{[A]}$ y $\overline{[B]}$.

Al efecto:

$$d_a = d_b \quad a_a = a_b = a \quad \psi_A = \psi_B = \psi$$

$$25) \begin{bmatrix} \gamma_a \\ d_a = d_b \end{bmatrix} \begin{cases} \psi_a = \psi_b \\ \psi \end{cases} = + L \frac{(1 + 2 a) \psi - \xi_0 A \delta / K}{2 \langle (1 + 2 a) \psi - \xi_0 A \delta / K \rangle} = \frac{L}{2}$$

$$\text{Ahora, si } d_a = d_b = 0 \quad a = 1 - \xi_0 \quad \delta = 0$$

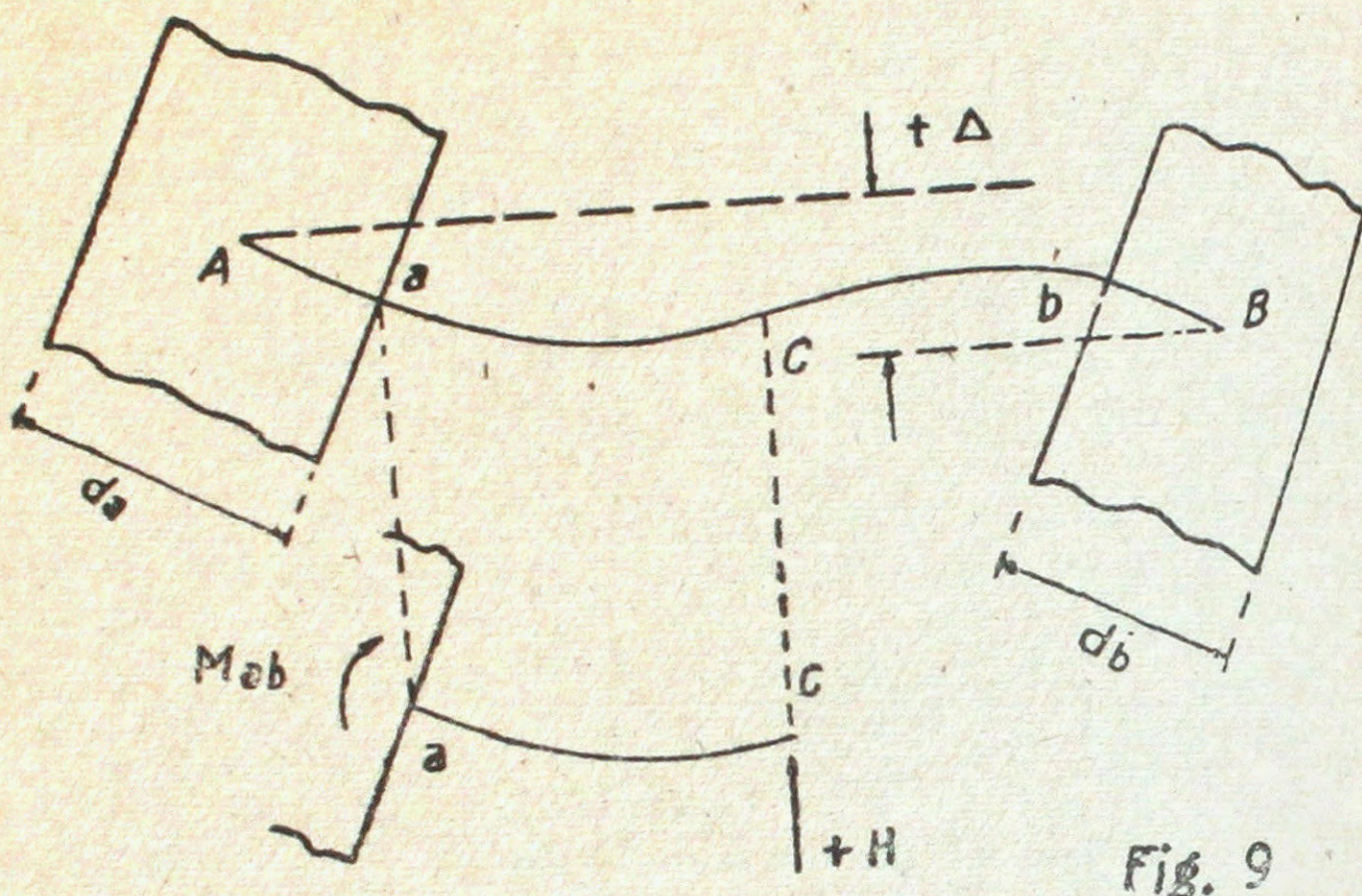
$$26) \begin{bmatrix} \gamma_a \\ d_a = d_b = 0 \end{bmatrix} = L \left[1 - \frac{(1 - \xi_0) \psi_a + (2 - \xi_0) \psi_b}{(3 - 2 \xi_0) (\psi_a + \psi_b)} \right]$$

Si despreciamos las deformaciones de corte $\xi_0 = 0$

$$\begin{bmatrix} \mu^a \\ \xi_0 = 0 \end{bmatrix} \begin{cases} d_a = d_b = 0 \\ \psi \end{cases} = L \left[1 - \frac{1}{3} \frac{\psi_a + 2 \psi_b}{\psi_a + \psi_b} \right] = \frac{L}{3} \frac{2 \psi_a + 2 \psi_b}{\psi_a + \psi_b}$$

relación conocida.

Para aplicar las ecuaciones de "Slope Deflection" al cálculo de pórtico se requieren las ecuaciones de momentos y corte referidas a las intersecciones de los ejes de las piezas —vigas y columnas— en vez de estar referidas a las caras o planos de que arrancan esas piezas.



Recordemos que M_{ab} es el momento exterior que obra sobre el arranque de la viga en \underline{a} y que hemos llamado H la fuerza exterior que actúa desde C sobre los trozos A, C y C, B . Reemplazando los valores 22).

$$27) \quad M_{AB} = M_{ab} + H \frac{d_a}{2}$$

$$28) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{AB} &= K \left[\left\langle 1 + a_a + \frac{d_a}{2L} (1 + 2 a_a) \right\rangle \psi_a + \left\langle a_b + \frac{d_a}{2L} (1 + 2 a_b) \right\rangle \psi_b \right] - \xi_o A \delta \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) \\ M_{BA} &= K \left[\left\langle a_a + \frac{d_b}{2L} (1 + 2 a_a) \right\rangle \psi_a + \left\langle 1 + a_b + \frac{d_b}{2L} (1 + 2 a_b) \right\rangle \psi_b \right] - \xi_o A \delta \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) \\ \psi_A &= \psi_b; \quad \psi_B = \psi_b \quad H_{AB} = H_{ab} \quad L \text{ es la luz libre de la viga.} \end{aligned} \right.$$

Si los centros A y B quedan a nivel y el extremo \underline{B} está fijo, tendremos

$$29) \quad M_{AB} = K \left[1 + a_a \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 0,5 \frac{d_a}{L} \right] \psi_A$$

$$30) \quad M_{BA} = K \left[a_a \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 0,5 \frac{a_a}{L} \right] \psi_A$$

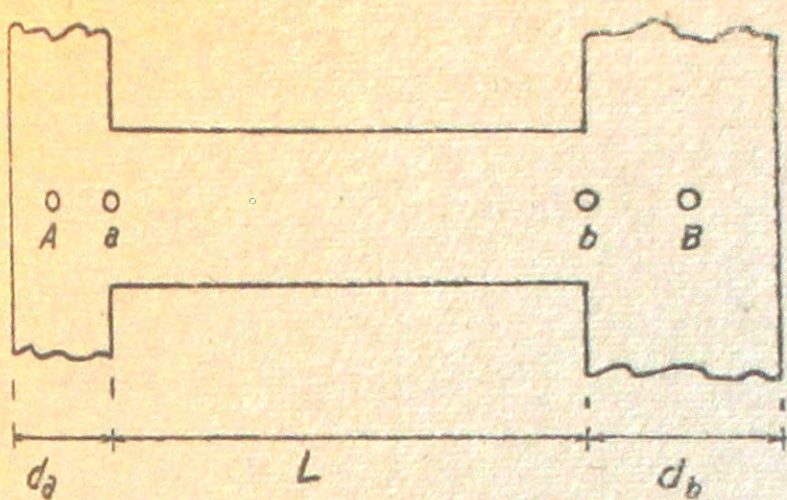


Fig. 10

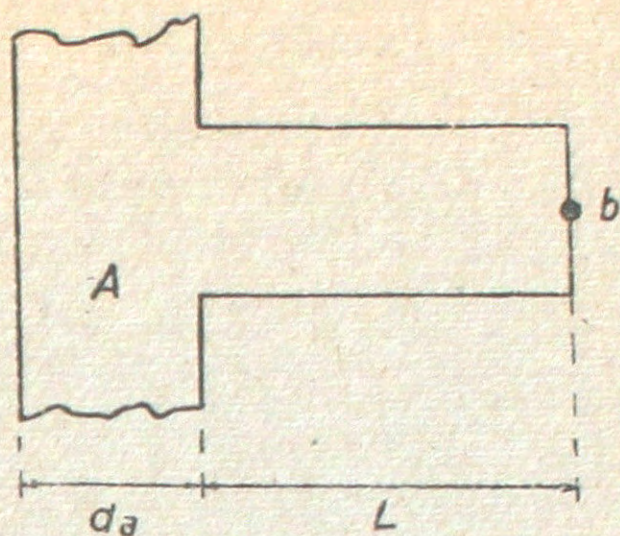


Fig. 11

El Sliffnes de la viga A. B. sería

$$S = \begin{bmatrix} M_{AB} \\ d_a = +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \psi_b = 0 \\ \delta = 0 \end{matrix} = 2 E K \left\langle 1 + a_a + \frac{d_a}{2b} (1 + 2 a_a) \right\rangle$$

$$31) \quad S_{AB} = 2 E K \left\langle 1 + a_a \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 0,5 \frac{d_a}{L} \right\rangle$$

o bien

$$S_{AB} = 2 E K \left\langle 2 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \frac{d_a}{L} \right) \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + \frac{3}{2} \frac{d_a}{L} \right\rangle$$

El coeficiente de traspaso "Carry Over".

$$32) \quad C. O. = \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{a_a \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + 0,5 \frac{d_b}{L}}{1 + a_a \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 0,5 \frac{d_a}{L}}$$

Supongamos ahora que el extremo b sea articulado que los centros \overline{A} y \overline{B} se encuentren a nivel y que el punto \overline{B} coincida con \overline{b} .

$$1) \quad d_b = 0$$

$$2) \quad a_b = 1 - \xi_0$$

$$3) \quad \delta = 0$$

$$4) \quad M_{ba} = K \left\langle a_a \psi_a + (2 - \xi_0) \psi_b \right\rangle = 0$$

$$\text{De 4) deducimos } \psi_b = - \frac{a_a}{2 - \xi_0} \psi_A$$

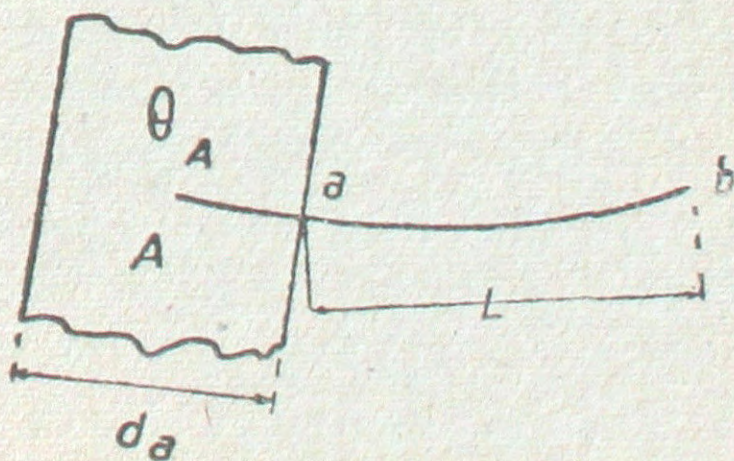


Fig. 12

Reemplazando en M_{Ab} y tomando en cuenta 2)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M_{Ab} \\ \delta \\ d_b \\ b \text{ artic} \end{bmatrix} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \\ \\ \end{matrix} &= K \left[1 + a_a + \frac{d_a}{2L} (1 + 2 a_a) - \frac{a_a}{2 \xi_0} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left\langle 1 - \xi_0 + \frac{d_a}{2L} (3 - 2 \xi_0) \right\rangle \right] \psi_A \\
 33) \quad \begin{bmatrix} S \\ \end{bmatrix}_{Ab} &= K \left(1 + \frac{d_a}{2L} \right) \left(1 + \frac{a_a}{2 - \xi_0} \right) 2 E \\
 &= 2 E K \left(1 + \frac{d_a}{2L} \right) \left(1 + \frac{a_a}{2 - \xi_0} \right)
 \end{aligned}$$

Otra relación importante es

$$M_{ab} = K \left[\left(1 + a_a \right) \psi_a - \left(1 - \xi_0 \right) \frac{a_a}{2 - \xi_0} \psi \right]$$

$$\theta_A = \theta_a$$

$$34) \quad M_{ab} = K \left(1 + \frac{a_a}{2 - \xi_0} \right) \cdot \psi_a$$

$$35) \quad H_{ab} = \frac{M_{ab} + O}{L} = \frac{K}{L} \left(1 + \frac{a_a}{2 - \xi_0} \right) \psi_a$$

Si del Sliffnes de la pieza Ab , fórmula 39) se desprecia la acción de las deformaciones de corte.

$$\begin{bmatrix} S \\ \end{bmatrix}_{Ab} \begin{matrix} \xi_0 = 0 \\ = 0 \end{matrix} = 3 E K \left(1 + \frac{d_a}{2L} \right)$$

$$H_b = 3 E \frac{K}{L} \cdot \theta_a$$

Se prefirió presentar el momento $(M_{ab})_\Delta$ debido a desnivelación de apoyos en función de la secc. A de la pieza porque presenta algunas ventajas en la distribución de las fuerzas de corte que se desarrollan en la Parte 3 de esta publicación.

Si se desea trabajar con el sistema clásico de plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio de virados y pórticos, es preferible presentar esas ecuaciones en otra forma.

Al efecto; agregando a la ecuación 6) la acción de desnivelación de apoyos según ecuación (10)

$$36) M_{ab} = 2 E K \left[\left(2 - \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{d} \right)^2} \right) \theta_a + \left(1 - \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{d} \right)^2} \right) \theta_b \right. \\ \left. - \frac{3 \Delta}{L} \frac{1}{1 + 3 \frac{e'}{e''} \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right]$$

$$\xi_0 = \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2}; \quad \psi_a = 2 E \theta_a; \quad \psi_b = 2 E \theta_b; \quad \delta' = 3 E \Delta$$

$$37) -\frac{6 E \Delta}{L} \cdot \frac{1}{1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2} = -3 \frac{\delta'}{L} \left(1 - \frac{3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2}{1 + 3 \frac{e''}{e'} \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right) = \\ = -3 \frac{\delta'}{L} \left(1 - \frac{3}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right) \\ = -3 \frac{\delta'}{L} \left(1 - \frac{2}{3} \xi_0 \right) = - \left(3 - 3 \xi_0 \right) \frac{\delta'}{L}$$

$$38) \left\{ \begin{array}{l} M_{ab} = K \left[\left(2 - \xi_0 \right) \psi_a + \left(1 - \xi_0 \right) \psi_b - \left(3 - 2 \xi_0 \right) i \right] \\ M_{ba} = K \left[\left(1 - \xi_0 \right) \psi_a + \left(2 - \xi_0 \right) \psi_b - \left(3 - 2 \xi_0 \right) i \right] \\ H_{ab} = + \frac{K}{L} \left(3 - 2 \xi_0 \right) \left(\psi_a + \psi_b - 2 i \right) \end{array} \right.$$

en que hemos llamado

$$39) \quad i = \frac{\delta' c}{L} = \frac{2 E \Delta_c}{L}$$

i es la pendiente media del eje de la pieza ampliada en $2 E$ veces. L como siempre es la luz libre.

Refiriéndonos a la fig. la desnivelación o movimiento

$$\Delta_p = \Delta_c + \theta_a \frac{d_a}{2} + \theta_b \frac{d_b}{2}$$

Multiplicada por $2 E$

$$\delta_p' = \delta_c + \frac{d_a}{2} \cdot \psi_a + \frac{d_b}{2} \psi_b$$

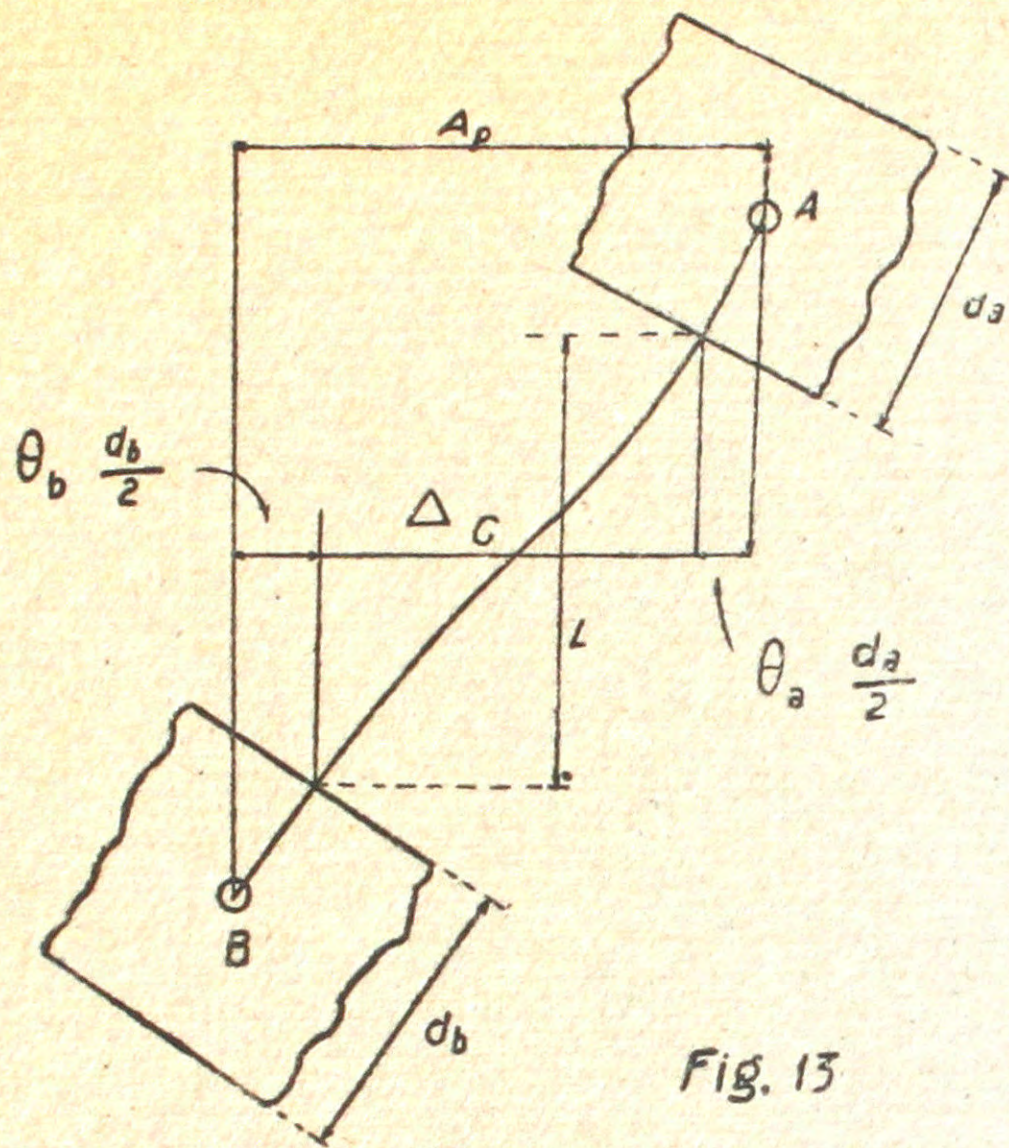


Fig. 13

Y reemplazando en la fórmula el valor $\delta_c = \delta_p - \frac{d_a}{2} \psi_a - d_b \frac{\psi_b}{2}$ tendremos:

$$M_{ab} = K \left[\left\langle 2 - \xi_0 + \psi_b (3 - 2 \xi_0) \frac{d_a}{2L} \right\rangle \psi_a + \left\langle 1 - \xi_0 + (3 - 2 \xi_0) \frac{d_b}{2L} \right\rangle \psi_b - (3 - 2 \xi_0) \frac{\delta_p'}{L} \right]$$

$$40) \left\{ \begin{aligned} M_{ab} &= K \left[\left\langle 2 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 1.5 \frac{d_a}{L} \right\rangle \psi_a + \left\langle 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + 1.5 \frac{d_b}{L} \right\rangle \psi_b - (3 - 2 \xi_0) \frac{\delta_p'}{L} \right] \\ M_{ba} &= K \left[\left\langle 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 1.5 \frac{d_a}{L} \right\rangle \psi_a + \left\langle 2 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + 1.5 \frac{d_b}{L} \right\rangle \psi_b - (2 - 2 \xi_0) \frac{\delta_p'}{L} \right] \\ H_{ab} &= \frac{K}{L} \left[\left\langle 3 - 2 \xi_0 \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 3 \frac{d_a}{L} \right\rangle \psi_a + \left\langle 3 - 2 \xi_0 \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + 3 \frac{d_b}{L} \right\rangle \psi_b - 2 (3 - 2 \xi_0) \cdot \frac{\delta_p'}{L} \right] \end{aligned} \right.$$

Comparando estas ecuaciones con las 17) 21) y 22) encontramos otras expresiones para los valores a y b y también que las expresiones de M_{ab} en las ecuaciones 28 y 40 son idénticas, como era de esperarse.

$$a_a = 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 1.5 \frac{d_a}{L}$$

Al efecto:

$$1 - \xi_0 + \frac{1}{3} \xi_0 \frac{e'}{e''} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{d_a}{h} = 1 - \xi_0 - \xi_0 \frac{d_a}{L} + 1.5 \frac{d_a}{L}$$

$$\frac{1}{3} \xi_0 \frac{e'}{e''} \cdot \left(\frac{L}{h} \right)^2 \cdot \frac{d_a}{L} = \left(1.5 - \xi_0 \right) \frac{d_a}{L}$$

$$\frac{4.5}{3} \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2 = 4.5 + 1.5 \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2 - 4.5$$

Recordando lo que en la ecuación 22) asignamos a δ el valor $\frac{E \Delta}{9}$ y en la ecuación 38) adelante el valor $\delta' = 2 E \Delta$ es fácil demostrar que

$$\xi_0 A \delta = K \left(3 - 2 \xi_0 \right) \frac{\delta'}{L}$$

Al efecto:
$$\xi_0 A \frac{E \Delta}{9} = \frac{K}{L} \left(3 - 2 \xi_0 \right) 2 E \Delta$$

$$\xi_0 e' b h L^2 = 18 e'' \frac{b h^3}{12} \left(3 - \frac{9}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \right)$$

$$4.5 e' L^2 = 4.5_a L^2$$

$$42) \quad a_a = 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + 1.5 \frac{d_a}{L} = 1 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \frac{d_a}{h} \right)$$

$$43) \quad a_b = 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + 1.5 \frac{d_b}{L} = 1 - \xi_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \cdot \frac{d_b}{h} \right)$$

$$44) \quad - K \left(3 - 2 \xi_0 \right) i = - \xi_0 A \frac{E \Delta}{9}$$

$$45) \quad [H]_{\Delta} = - 2 \frac{K}{L} \left(3 - 2 \xi_0 \right) i \quad \text{para } \psi_A = \psi_B = 0$$

$$48) H_{ab} = \frac{K}{L_c} \left[\left(1 + 2 a_a\right) \psi_a + \left(1 + 2 a_b\right) \psi_b - 2 \left(3 - 2 \xi_0\right) \frac{\delta'_p}{L_c} \right]$$

H_{ab} de la form. 48) es idéntico al valor de la fórmula 38) pág. 197, como era de esperarse. Al efecto:

$$1 + 2 a_a = 1 + 2 - 2\xi_0 + \frac{2}{3} \xi_0 \frac{e'}{e''} \frac{L}{h} \cdot \frac{d_a}{h} = 3 - 2 \xi_0 + \frac{2}{3} \xi_0 \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h}\right)^2 \frac{d_a}{L}$$

tomando en cuenta que

$$3 - 2 \xi_0 = 3 - 2 \frac{4,5}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h}\right)^2} = \frac{9 + 3 \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h}\right)^2 - 9}{3 + \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h}\right)^2} = \frac{2}{3} \xi_0 \frac{e'}{e''} \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

$$1 + 2 a_a = \left(3 - 2 \xi_0\right) \left(1 + \frac{d_a}{L_c}\right)$$

y $1 + 2 a_b = \left(3 - 2 \xi_0\right) \left(1 + \frac{d_b}{L_c}\right)$ entonces

$$49) H_{ab} = - \frac{K}{L_c} \left(3 - 2 \xi_0\right) \left[\left(1 + \frac{d_a}{L}\right) \psi_a + \left(1 + \frac{d_b}{L}\right) \psi_b - 2 \frac{\delta'_p}{L_c} \right]$$

$$= \underbrace{\psi_a + \psi_b - 2 \frac{1}{L} \left(\delta'_p - \frac{d_a}{2} \psi_a - \frac{d_b}{2} \psi_b\right)}_{\delta'_c}$$

$$38) H_{ab} = \frac{K}{L_c} \left(3 - 2 \xi_0\right) \left(\psi_a + \psi_b - 2 i_c\right)$$

Si existe simetría vertical —u horizontal si se trata de vigas— introduciendo en 49), los valores

$$d_a = d_b \quad \psi_a = \psi_b = \psi$$

$$50) H_{ab} = 2 \frac{K}{L_c} \left(3 - 2 \xi_0\right) \left[\left(1 + \frac{d_a}{L}\right) \psi - \frac{\delta'_p}{L_c} \right]$$

en que $\delta'_p = 2 E \Delta_p \cdot \Delta_p$ es el desplome por piso o bien valiéndonos de la fórmula 38).

$$51) H_{ab} = 2 \frac{K}{L_c} \left(3 - 2 \xi_0\right) \left(\psi - \frac{\delta'_c}{L_c}\right)$$

Como observación interesante, anotaremos que si los ángulos $\psi = 2 E \theta$ y la pendiente media $\frac{\delta'_c}{L} = \frac{2 E \Delta_c}{L}$ fueran iguales H_{ab} sería cero. Para que este caso límite suceda, es necesario que la columna fuera muy rígida respecto a

las vigas de pies y cabecial. En tal caso, no existirían momentos producidos por giros de los nudos distintos de la pendiente media de la columna y por tanto, no existiría esfuerzo cortante producido por esos giros adicionales de la elástica de la columna.

Tomando en cuenta que:

$$1 + a_a = 1 + 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_a}{L}\right) + 1,5 \frac{d_a}{L}$$

$$a_b = 1 - \xi_0 \left(1 + \frac{d_b}{L}\right) + 1,5 \frac{d_b}{L}$$

$$\begin{aligned} 1 + a_a + a_b &= \left(3 - 2 \xi_0\right) \left(1 + \frac{d_a}{2L} + \frac{d_b}{2L}\right) = \\ &= \left(3 - 2 \xi_0\right) \left(L + \frac{d_a}{2} + \frac{d_b}{2}\right) \frac{1}{L} \end{aligned}$$

llamando L_c la luz libre de la viga o columnas y L_p la distancia entre ejes de columnas o pisos.

$$1 + a_a + a_b = \left(3 - 2 \xi_0\right) \frac{L_p}{L_c}$$

$$52) \quad 3 - 2 \xi_0 = \left(1 + a_a + a_b\right) \frac{L_c}{L_p}$$

$$\text{ahora} \quad - \left(3 - 2 \xi_0\right) \frac{\delta_p}{L_c} = - \left(1 + a_a + a_b\right) \frac{2 E \Delta_p}{L_p} = \left(1 + a_a + a_b\right) i_p$$

y las ecuaciones 22) y 38), toman la forma

$$53) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{ab} &= K_c \left[\left(1 + a_a\right) \psi_a + a_b \psi_b - \left(1 + a_a + a_b\right) i_p \right] \\ M_{ba} &= K_c \left[\left(1 + a_b\right) \psi_b + a_a \psi_a - \left(1 + a_a + a_b\right) i_c \right] \\ H_{ab} &= \frac{K_c}{L_p} \left(1 + a_a + a_b\right) \left(\psi_a + \psi_b - 2 i_c\right) \\ K_c &= \frac{I_c}{L_c} \quad i_c = \frac{2 E \Delta_c}{L_c} \quad i_p = \frac{3 E \Delta_p}{L_p} \end{aligned} \right.$$

En vez de H_{ab} de la fórmula 53), podríamos anotar

$$54) \quad H_{ab} = \frac{K_c}{L_c} \left[\left(1 + 2 a_a\right) \psi_a + \left(1 + 2 a_b\right) \psi_b - 2 \left(1 + a_a + a_b\right) i_p \right]$$

También podríamos presentar las ecuaciones 35) en otra forma, poniendo:

$$55) \left\{ \begin{array}{l} \beta_a = a_a \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + \frac{1}{2} \frac{d_a}{L} \\ \beta_b = a_b \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + \frac{1}{2} \frac{d_b}{L} \\ \beta_{ba} = a_b \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) + \frac{1}{2} \frac{d_a}{L} \\ \beta_{ab} = a_a \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) + \frac{1}{2} \frac{d_b}{L} \end{array} \right.$$

y recordando que $\xi_0 A \delta = K (3 - 2 \xi_0) \frac{\delta'_p}{L_c} = K (1 + a_a + a_b) i_p$.

$$56) \left\{ \begin{array}{l} M_{AB} = K \left[\left(1 + \beta_a \right) \psi_a + \beta_{ba} \psi_b - \left(1 + a_a + a_b \right) \left(1 + \frac{d_a}{L} \right) i_p \right] \\ M_{BA} = K \left[\left(1 + \beta_b \right) \psi_b + \beta_{ab} \psi_a - \left(1 + a_a + a_b \right) \left(1 + \frac{d_b}{L} \right) i_p \right] \\ H_{AB} = \frac{K}{L_p^2} \left[\left(1 + \beta_a + \beta_b \right) \psi_a + \left(\beta_b + \beta_{ab} \right) \psi_b - 2 \left(1 + a_a + a_b \right) \frac{2 E \Delta_p}{L_c} \right] \end{array} \right.$$

$$\psi_a = \psi_A \quad \psi_b = \psi_B \quad i_p = \frac{2 E \Delta_p}{L_p} \quad K = \frac{I_a}{L_c} \quad L = L_c$$

D. S. V.