Sobre los Polígonos Regulares, Convexos i Estrellados

(Conclusion)

CAPÍTULO III

Polígonos regulares circunscritos

24) Para circunscribir un polígono regular del jénero m i de la especie n, basta considerar el inscrito correspondiente i determinar sus vértices por los métodos ya conocidos, dibujando en seguida las tanjentes por los puntos de division.

Segun el estudio anterior, podemos circunscribir los polígonos regulares de los jéneros $3 \cdot 2^n$, $4 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ i $15 \cdot 2^n$.

PROBLEMAS

25) *Calcular el lado* $^{(p)}L_n$ *en funcion de r i del lado* $\left({}^{(p)}l_n\right)$ *del polígono inscrito del mismo número de lados.*

Resl.: Sea $AB = L_n$ i unamos O con A i B, será

$$CD = l_n \quad \text{(fig. 49)}$$

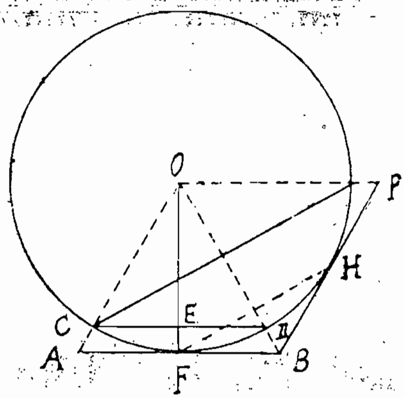

Fig. 49

Los triángulos semejantes ABO i CDO nos dan

$$\frac{AB}{CD} = \frac{FO}{EO}$$

i reemplazando valores

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} l_n^2}}$$

de donde

$$L_n = \frac{2r\, l_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}} \quad (\delta)$$

26) RECÍPROCAMENTE.—*Calcular l_n en funcion de r i L_n*
Resl. (fig. 49).

$$\Delta\, AOB \backsim \Delta\, COD$$

luego

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

i reemplazando valores

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4} L_n^2}}{r}$$

de donde

$$l_n = \frac{2r L_n}{\sqrt{4r^2 + L_n^2}} \quad (\gamma)$$

27) *Calcular L_n en funcion de l_n i l_n*

Resl. (fig. 49):

$$\underline{\Delta\ FBH \backsim \Delta\ CDN}$$

$$\frac{BF}{CD} = \frac{FH}{CN}$$

i reemplazando valores

$$\frac{\frac{1}{2} L_n}{l_n} = \frac{l_n}{{}^{(2)}l_n}$$

de donde

$$L_n = \frac{2 \cdot l_n^2}{{}^{(2)}l_n} \quad (\delta')$$

28) *Valores de los lados en funcion del radio.*

Se puede seguir en algunos casos un método directo i sencillo para determinar los valores de los lados de los polígonos circunscritos. Pero, en jeneral, se pueden emplear las fórmulas δ i δ'.

$${}^{(p)}L_n = \frac{2r \cdot {}^{(p)}l_n}{\sqrt{4r - {}^{(p)}l_n^2}}$$

i

$$L_n = \frac{2 \cdot l_n^2}{{}^{(2)}l_n}$$

Damos a continuacion algunos valores.

1)

$$L_4 = 2r$$

2)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_8 = 2r\,(-1 + \sqrt{2}) \\ {}^{(3)}L_8 = 2r\,(1 + \sqrt{2}) \end{array} \right.$$

3)

$$L_3 = 2r\sqrt{3}$$

4)

$$L_6 = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$$

5)

$$\begin{cases} L_{12} = 2r\,(2 - \sqrt{3}\,) \\ {}^{(5)}L_{12} = 2r\,\sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} L_5 = 2r\,\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \\ {}^{(2)}L_5 = 2r\,\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \end{cases}$$

7)

$$\begin{cases} L_{10} = \dfrac{2r}{5}\,\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5}\,)} \\ {}^{(3)}L_{10} = \dfrac{2r}{5}\,\sqrt{5\,(5 + 2\sqrt{5}\,)} \end{cases}$$

OBS.—$\sqrt{4r^2 - l^2_n}$ es el valor de la apotema del polígono inscrito de n lados, i como hemos hecho ver que las apotemas eran las mitades de las cuerdas suplementarias de l_n, se podrán escribir sus valores en el acto, siempre que correspondan a los calculados anteriormente. La fórmula jeneral puede escribirse como sigue, llamando n el jénero i p la especie:

$${}^{(p)}L_n = \frac{2r \,.\, {}^{(p)}l_n}{{}^{(p)}\rho_n}$$

---

29) *Área de algunos polígonos regulares inscritos en funcion del radio (r) del círculo circunscrito.*

En jeneral, podemos servirnos de la fórmula

$${}^{(n)}S_m = \frac{m \,.\, {}^{(n)}\rho_m}{2}\left({}^{(n)}l_m - {}^{(n-1)}l'_m\right)$$

que ya conocemos (número 9, párrafo f).

OBS.—En los polígonos convexos ${}^{n-1}l_m = {}^{(0)}l_m . = 0$, i la fórmula anterior se convierte en la ya conocida

$$S_m = \frac{m\rho}{2} . l_m$$

1.°) *Triángulo equilátero*

$$S_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$$

Resl.:

$$S_3 = \frac{3\rho}{2} . l_3$$

pero

$$l_3 = r\sqrt{3} \qquad \text{(núm. 13)}$$

i

$$\rho = \frac{r}{2} \qquad \text{(id. obs.)}$$

i reemplazando queda

$$S_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$$

2.°) *Exágono.*

$$S_6 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$$

3.° *Dodecágono.*

a) Convexo. Resl.:

$$S_{12} = \frac{12\rho}{2} . l_{12}$$

de donde

$$S_{12} = 3 . r^2$$

b) Estrellado.

$${}^{(5)}S_{12} = 6r^2 (2 - \sqrt{3})$$

Resl.:

$$ {}^{(5)}S_{12} = \frac{12\,\rho}{2}\left({}^{(5)}l_{12} - {}^{(5-1)}l'_{12} \right) $$

pero

$$ {}^{(5)}l_{12} = r\sqrt{2+\sqrt{3}} $$

$$ {}^{(5)}\rho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} $$

ademas

$$ {}^{(5-1)}l'_{12} = l'_{3} $$

es decir, el lado del triángulo equilátero circunscrito a la circunferencia cuyo radio es ${}^{(5)}\rho_{12}$, luego

$$ l'_{3} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} $$

reemplazando, hallamos

$$ {}^{(5)}S_{12} = 3r^{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\,.\sqrt{3}\right) $$

i ejecutando

$$ {}^{(5)}S_{12} = 6r^{2}(2-\sqrt{3}) $$

4.°) *Cuadrado.*

$$ S_{4} = 2r^{2} $$

5.°) *Octógono.*
a) Convexo.

$$ S_{8} = 2r^{2}\sqrt{2} $$

b) Estrellado.

$$ {}^{(3)}S_{8} = 4r^{2}(\sqrt{2} - 1) $$

Resl.:

$$^{(3)}S_8 = \frac{8 \,.\, ^{(3)}\rho_8}{2} \left(^{(3)}l_8 - ^{(3-1)}l'_8 \right)$$

pero

$$^{(3)}l_8 = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$^{(3)}\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$l'_4 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

i reemplazando, hallamos por fin

$$^{(3)}S_8 = 4r^2 \left(\sqrt{2}-1\right)$$

6.º) *Pentágono.*

a) Convexo.

$$S_5 = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

b) Estrellado.

$$^{(2)}S_5 = \frac{5}{8}\,r^2 \left\{ 2\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{130-58\sqrt{5}} \right\}$$

7.º) *Decágono.*

a) Convexo.

$$S_{10} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

b) Estrellado.

$$^{(3)}S_{10} = \frac{5}{4}\,r^2 \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{250-110\sqrt{5}} \right)$$

30) *Area de algunos polígonos regulares en funcion del lado.* Llamemos a el lado.

1.°) *Triángulo equilátero.*

$$S_3 = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

2.°) *Exágono.*

$$S_6 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

Resl.:

$$S_6 = \frac{6\rho}{2} . a$$

pero

$$\rho = \frac{r}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

i reemplazando queda

$$S_6 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

3.°) *Dodecágono.*

a) Convexo.

$$S_{12} = 3 a^2 (2 + \sqrt{3})$$

Resl.:

$$S_{12} = \frac{12 . \rho}{2} . a \qquad (1)$$

pero

$$\rho = \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \qquad (2)$$

por otra parte

$$a = r \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

luego

$$r = \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

reemplazando en (2), queda

$$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

o bien

$$\rho = \frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$$

i sustituyendo en (1), nos da

$$S_{12} = 3\,a^2\,(2+\sqrt{3})$$

b) Estrellado.

$$^{(5)}S_{12} = 6\,a^2\,(7-4\sqrt{3})$$

Resl.:

$$^{(5)}S_{12} = \frac{12\,\rho}{2}\,(a-l'_3) \qquad (1)$$

pero

$$\rho = \frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

i

$$l'_3 = r\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{3}$$

por otra parte

$$a = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

de donde

$$r = \frac{a}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

i reemplazando el valor de r, hallamos

$$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$$

i

$$l'_3 = a\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3} = a\,(2-\sqrt{3})\,\sqrt{3}$$

i sustituyendo en (1), hallamos por fin

$$^{(5)}S_{12} = 6\,a^2\,(7-4\sqrt{3})$$

4.º) *Octógono.*

a) Convexo.

$$S_8 = 2\,a^2\,(1+\sqrt{2})$$

b) Estrellado.

$$^{(3)}S_8 = 2\,a^2\,(3\sqrt{2}-4)$$

5.º) *Pentágono.*

a) Convexo.

$$S_5 = \frac{a^2}{4}\sqrt{5\,(5-2\sqrt{5})}$$

b) Estrellado.

$$^{(2)}S_5 = \frac{5}{4}\,a^2\sqrt{25-11\sqrt{5}}$$

6.º) *Decágono.*

a) Convexo.

$$S_{10} = \frac{5}{2}\,a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

b) Estrellado.

$$^{(3)}S_{10} = 5\,a^2\sqrt{85-38\sqrt{5}}$$

FÓRMULAS I RELACIONES

1) Valor de los ángulos de un polígono del jénero m i de la especie n.

$$2Rm - 4Rn$$

2) Superficie de un polígono regular.

$$^{(n)}S_m = \frac{m}{2} \cdot {}^{(n)}\rho_m \left({}^{(n)}l_m - {}^{(n-1)}l_m \right)$$

3)

$$l_{2m} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l_m^2}\right)}$$

4)

$$l_m = \frac{l_{2m}}{r} \sqrt{4r^2 - l_{2m}^2}$$

5)

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

6)

$$l_6 = r$$

7)

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

8)

$$^{(5)}l_{12} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

9)

$$l_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

10)

$$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

11)

$$\rho_3 = \frac{1}{2} r$$

12)

$$\rho_6 = \frac{1}{2} l_3$$

13)

$$\rho_{12} = \frac{1}{2} {}^{(5)}l_{12}$$

14)

$${}^{(5)}\rho_{12} = \frac{1}{2} l_{12}$$

15)

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

16)

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

17)

$${}^{(3)}l_8 = r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

18)

$$l_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

19)

$$l_{32} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

20)

$$\rho_8 = \frac{1}{2} {}^{(3)}l_8$$

21)

$${}^{(3)}\rho_8 = \frac{1}{2} l$$

22)

$$l_{10}^2 = r\,(r - l_{10})$$

23)

$${}^{(3)}l_{10} = r + l_{10}$$

24)

$$^{(3)}l_{10}^2 = r\left(r + {}^{(3)}l_{10}\right)$$

25)

$$r^2 = {}^{(3)}l_{10} \cdot l_{10}$$

26)

$$l_{10} = \frac{r}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

27)

$$^{(3)}l_{10} = \frac{r}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

28)

$$l_5^2 = r^2 + l_{10}^2$$

29)

$$^{(2)}l_5^2 = r^2 + {}^{(3)}l_{10}^2$$

30)

$$^{(2)}l_5^2 = l_5\left(l_5 + {}^{(2)}l_5\right)$$

31)

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

32)

$$^{(2)}l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

33)

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\,{}^{(2)}l_5$$

34)

$$^{(3)}\rho_{10} = \frac{1}{2} \cdot l_5$$

35)

$$\rho_5 = \frac{1}{2}\,{}^{(3)}l_{10}$$

36)

$$^{(2)}\rho_5 = \frac{1}{2} \cdot l_{10}$$

37)

$$l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

38)

$$^{(9)}l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

39)

$$^{(3)}l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

40)

$$^{(7)}l_{20} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

41)

$$\rho_{20} = \frac{1}{2}\,{}^{(9)}l_{20}$$

42)

$$^{(9)}\rho_{20} = \frac{1}{2}\,l_{20}$$

43)

$$^{(7)}\rho_{20} = \frac{1}{2}\,{}^{(3)}l_{20}$$

44)

$$^{(3)}\rho_{20} = \frac{1}{2}\,{}^{(7)}l_{20}$$

45)

$$l_{20} = r\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

46)

$$l_{40} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$

47)

$$l_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \sqrt{6(\sqrt{3}-5)}\right)$$

48)

$$ {}^{(4)}l_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})} + \sqrt{6\,(\sqrt{3}-5)} \right) $$

49)

$$ {}^{(2)}l_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{6\,(\sqrt{3}+5)} - \sqrt{2\,(5-\sqrt{5})} \right) $$

50)

$$ {}^{(7)}l_{15} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{6\,(\sqrt{3}+5)} + \sqrt{2\,(5-\sqrt{5})} \right) $$

51)

$$ l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{6\,(5-\sqrt{5})} - \sqrt{2\,(3+\sqrt{5})} \right\} $$

52)

$$ {}^{(11)}l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{6\,(5-\sqrt{5}} + \sqrt{2\,(3+\sqrt{5})} \right\} $$

53)

$$ {}^{(7)}l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{6\,(5+\sqrt{5})} - \sqrt{2\,(3-\sqrt{5})} \right\} $$

54)

$$ {}^{(18)}l_{30} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{6\,(5+\sqrt{5})} + \sqrt{2\,(3-\sqrt{5})} \right\} $$

55)

$$ \rho_{30} = \frac{1}{2}\,{}^{(7)}l_{15} $$

56)

$$ {}^{(7)}\rho_{15} = \frac{1}{2}\,l_{30} $$

57)

$$ {}^{(7)}\rho_{30} = \frac{1}{2}\,{}^{(4)}l_{15} $$

58)

$$ {}^{(4)}\rho_{15} = \frac{1}{2}\,{}^{(7)}l_{30} $$

59)

$$^{(11)}\rho_{30} = \frac{1}{2}\,{}^{(2)}l_{15}$$

60)

$$^{(2)}\rho_{15} = \frac{1}{2}\,{}^{(11)}l_{30}$$

61)

$$^{(13)}\rho_{30} = \frac{1}{2}\,l_{15}$$

62)

$$\rho_{15} = \frac{1}{2}\,{}^{(13)}l_{30}$$

63)

$$l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(6-2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{(10+2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})} \right\}$$

64)

$$^{(11)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(6-2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} + \sqrt{(10+2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})} \right\}$$

65)

$$^{(13)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(6+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})} \right\}$$

66)

$$^{(23)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(6+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} + \sqrt{(10-2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})} \right\}$$

67)

$$^{(7)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(10-2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{(6+2\sqrt{5}).(2-\sqrt{3})} \right\}$$

68)

$$^{(17)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(10-2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} + \sqrt{(6+2\sqrt{5}).(2-\sqrt{3})} \right\}$$

69)

$$^{(19)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} - \sqrt{(6-2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})} \right\}$$

70)

$$^{(29)}l_{60} = \frac{r}{4}\left\{ \sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})} + \sqrt{(6-2\sqrt{5})(2-\sqrt{3})} \right\}$$

71)

$$L_m = \frac{2r\, l_m}{\sqrt{4r^2 - l_m^2}} = \frac{2r\, l_m}{\rho_m}$$

72)

$$l_m = \frac{2r\, L_m}{\sqrt{4r^2 + L_m^2}}$$

73)

$$L_m = \frac{2\, l_m^2}{{}^{(2)}l_m}$$

74)

$$L_4 = 2r$$

75)

$$L_8 = 2r\,(-1 + \sqrt{2})$$

76)

$$^{(3)}L_8 = 2r\,(1 + \sqrt{2})$$

77)

$$L_3 = 2r\sqrt{3}$$

78)

$$L_6 = \frac{2}{3}\, r\sqrt{3}$$

79)

$$L_{12} = 2r\,(2 - \sqrt{3})$$

80)

$$^{(5)}L_{12} = 2r\,(2 + \sqrt{3})$$

81)

$$L_5 = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

82)

$$^{(2)}L_5 = 2r\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

83)

$$L_{10} = \frac{2}{5}\, r\sqrt{5\,(5 - 2\sqrt{5})}$$

84)

$$ {}^{(3)}L_{10} = \frac{2}{5} r \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} $$

85)

$$ S_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} $$

86)

$$ S_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3} $$

87)

$$ S_{12} = 3 r^2 $$

88)

$$ {}^{(5)}S_{12} = 6r^2 (2 - \sqrt{3}) $$

89)

$$ S_4 = 2r^2 $$

90)

$$ S_8 = 2r^2 \sqrt{2} $$

91)

$$ {}^{(3)}S_8 = 4r^2 (-1 + \sqrt{2}) $$

92)

$$ S_5 = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}} $$

93)

$$ {}^{(2)}S_5 = \frac{5}{8} r^2 \left\{ \sqrt{10-2\sqrt{5}} - \sqrt{130-58\sqrt{5}} \right\} $$

94)

$$ S_{10} = \frac{5}{4} r^2 \sqrt{10-2\sqrt{5}} $$

95)

$$ {}^{(3)}S_{10} = \frac{5}{4} r^2 \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{250-110\sqrt{5}} \right) $$

96)

$$ S_3 = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} $$

97)

$$S_6 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}.$$

98)

$$S_{12} = 3 a^2 (2 + \sqrt{3})$$

99)

$$^{(5)}S_{12} = 6 a^2 (7 - 4 \sqrt{3})$$

100)

$$S_8 = 2 a^2 (1 + \sqrt{2})$$

101)

$$^{(3)}S_8 = 2 a^2 (-4 + 3 \sqrt{2})$$

102)

$$S_5 = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{5 (5 + 2 \sqrt{5})}$$

103)

$$^{(2)}S_5 = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{25 - 11 \sqrt{5}}$$

104)

$$S_{10} = \frac{5}{2} a^2 \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}}$$

105)

$$^{(3)}S_{10} = 5 a^2 \sqrt{85 - 38 \sqrt{5}}$$

LUIS A. SILVA