REGLAS FUNDAMENTALES DE DIFERENCIACION

POR

CARLOS WARGNY

(*Continuacion*)

24. Ejercicios difíciles.

171. $y = \dfrac{a+bx}{c}$ (EDWARDS, 51).

Esta es una función racional entera; hacemos

$$ax+b=u, \quad y=\frac{u}{c} \therefore d\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}du=\frac{b}{c}\,x.$$

Mentalmente, $d\,\dfrac{a+bx}{c} = \dfrac{1}{c}d\,(a+bx) = \dfrac{b}{c}\,x.$

172. $y=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m$ (CATALÁN, 121).

Suma de funciones; se diferencia cada término:

$$dy=(A_0\,mx^{m-1}+A_1\,(m-1)\,x^{m-2}+\ldots+A_{m-1})\,dx$$

173. $y=Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots$

Suma de funciones:

$$dy=(Amx^{m-1}+Bnx^{n-1}+Cpx^{p-1}+\ldots)\,dx$$

174. $y=ax^3+b^2x^2+c^4\sqrt{x}$ (BOUCHARLAT, 11)

Suma de funciones.

$$dy=\left(3\,ax^2+2\,b^2\,x+c^4\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

175. $y=a+b\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{c}{2\sqrt{x}}$ (LAURENT, 19)

Suma de funciones que se escribe así:

$$d\left(a+bx^{\frac{2}{3}}-\tfrac{1}{2}\,cx^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(\tfrac{2}{3}\,bx^{-\frac{1}{3}}+\tfrac{1}{4}\,cx^{-\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{2\,b}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{c}{4x\sqrt{x}}\right)dx$$

176. $y=(1+x^m)^n+(1+x^n)^m$ (Rice-Johnson, 34)

Suma de funciones.

$$dy=mn\left[x^{m-1}(1+x^m)^{n-1}+x^{m-1}(1+x^n)^{m+1}\right]dx$$

177. $y=(a+x^2)^3\,(b+x^3)^2$ (Carr, 262)

Producto de funciones. Aplicamos logaritmos:

$$Ly=3\;L\,(a+x^2)+2\,L\,(b+x^3)$$

$$\frac{dy}{y}=3\,\frac{d\,(a+x^2)}{a\;\;x^2}+2\,\frac{d\,(b+x^3)}{b+x^3}=\left[\frac{6\,x}{a+x^2}+\frac{6\,x^2}{b+x^3}\right]dx$$

$$dy=(a+x^2)^3\,(b+x^3)^2\,\frac{6\,bx+6\,x^4+6\,ax^2+6\,x^4}{(a+x^2)\,(b+x^3)}\,dx$$

$$=6\,(a+x^2)^2\,(b+x^3)\,(2\,x^4+ax^2+bx)\,dx$$

$$=6\,x\,(a+x^2)^2\,(b+x^3)\,(b+ax+2x^2)\,dx$$

178. $y=(x^3-3\,x-5)^2\,(x^2+2\,x-1)^3$ (Catalán, 122).

Producto de funciones. Se aplican L:

$$Ly=2\,\mathrm{L}\,(x^3-3\,x-5)+3\,\mathrm{L}\,(x^2+2\,x-1)$$

$$\frac{dy}{y}=\left[2\,\frac{3\,x^2-3}{x^3-3x-5}+3\,\frac{2\,x+2}{x^2+2\,x-1}\right]dx$$

$$dy=6\,(x^3-3\,x-5)\,(x^2+2\,x-1)^2\,(x+1)\,[\,x^3-3\,x-5+(x^2+2\,x-1)\,(x-1)\,]\,dx.$$

179. $u=(a+bx)^m\,(c+fx)^n\,(g+hx)^p$. (LARDNER, 21).

Producto de funciones:

$$\mathrm{L}u=m\mathrm{L}\,(a+bx)+n\mathrm{L}\,(c+fx)+p\mathrm{L}\,(g+hx)$$

$$\frac{du}{u}=\left[\,m\,\frac{b}{a+bx}+n\frac{f}{c+fx}+p\frac{h}{g+hx}\right]dx$$

$$du=(a+bx)^m\,.\,(c+fx)^n\,.\,(g+hx)^p$$

$$\times\left(\frac{mb}{a+bx}+\frac{nf}{c+fx}+\frac{ph}{g+hx}\right)dx$$

180. $y=x^2\,(a^2+x^2)\,\sqrt{a^2-x^2}$ (STURM, 41).

Producto de funciones. Se aplican L:

$$\mathrm{L}y=2\mathrm{L}x+\mathrm{L}\,(a^2+x^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,(a^2-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}=\left[\frac{2}{x}+\frac{2x}{a^2+x^2}+\frac{1}{2}\,\frac{-2x}{a^2-x^2}\right]dx$$

$$dy=x\,\frac{2a^4+a^2x^2-5x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

181. $y=\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{b+x}{b-x}$ (BAILY-LUND, 18).

Cuociente de funciones. Se aplican L:

$$\mathrm{L}y=\mathrm{L}\,(a+x)+\mathrm{L}\,(b+x)-\mathrm{L}\,(a-x)-\mathrm{L}\,(b-x)$$

$$\frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right)dx$$

$$dy=\frac{2(a+b)\,(ab-x^2)}{(a-x)^2\,(b-x)^2}$$

182. $y=\frac{(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}}{3x^3}$ (SONNET, 29).

Cuociente de funciones. Se aplican L:

$$\mathrm{L}y=\mathrm{L}\,(1+2x^2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,(1-x^2)-\mathrm{L}3-3\mathrm{L}x$$

$$\frac{dy}{y}=\left(\frac{4x}{1+2x^2}+\frac{-2x}{2\,(1-x^2)}-\frac{3}{x}\right)dx$$

$$dy = -\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

183. $y = \dfrac{(8x^4+4x^2+3)\sqrt{x^2-1}}{15x^5}$ (id.)

Cuociente de funciones. Se aplican L:

$$Ly = L\,(8x^4+4x^2+3) + \tfrac{1}{2}L\,(x^2-1) - L15 - 5Lx$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{32x^3+8x}{8x^4+4x^2+3} + \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2-1} - \frac{5}{x}\right)dx$$

$$\therefore dy = \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$$

184. $y = \dfrac{1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}}{1+x+x^2+\ldots+x^{q-1}}$ (Catalán, 123)

Multipliquemos por $(1-x) : (1-x)$ y se obtiene:

$$y = \frac{1-x^p}{1-x^q}$$

Cuociente de funciones. Aplicamos la fórmula 9:

$$dy = \frac{(1-x^q)\,d\,(1-x^p) - (1-x^p)\,d\,(1-x^q)}{(1-x^q)^2}$$

$$= \frac{(1-x^q)\ p.\ -x^{p-1}-(1-x^p)\ .\ -qx^{q-1}}{(1-x^q)^2}\ dx$$

$$= \frac{qx^{q-1}\Sigma x - px^{p-1}\Sigma^1 x}{(1-x)\ \Sigma' x}\ dx$$

Σx y $\Sigma^1 x$ representan los dos términos de la fracción de la función primitiva.

185. $y=\sqrt[3]{1+2x-x^2}$ (TIMMERMANS, 31).

Función irracional entera. Hacemos $1+2x-x^2=u$

$$y=u^{\frac{1}{3}}\ \therefore\ d\left(u^{\frac{1}{3}}\right)=\tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du=\frac{du}{3\sqrt[3]{u^2}};$$

pero $du=d\ (1-2x-x^2)=2\ (1-x)\ dx$

$$\therefore\ dy=\frac{2\ (1-x)}{3\sqrt[3]{(1+2x-x^2)^2}}\ dx$$

Mentalmente se hace así:

$$d\ (1+2x-x^2)^{\frac{1}{3}}=\tfrac{1}{3}\ (1+2x-x^2)^{-\frac{2}{3}}\ (2-2x)\ dx$$

186. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (TODHUNTER, 50).

Función irracional fraccionaria. Hacemos $a^2-x^2=v^2$

$$y=\frac{x}{v} \therefore d\left(\frac{x}{v}\right)=\frac{vdx+xdv}{v^2}=\frac{(a^2-x^2)+x\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}dx$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx$$

187. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{a-x}}$ (STURM, 41).

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$L=\tfrac{1}{2}\left[3Lx-L(a-x)\right]$$

$$\frac{dy}{y}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{3}{x}+\frac{1}{a-x}\right]d=x\,\frac{3a-3x+x}{2x(a-x)}dx$$

$$dy=x^{\frac{3}{2}}.(a-x)^{-\frac{1}{2}}\frac{3a-2x}{2x(a-x)}dx=\frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}dx$$

188. $y=\sqrt{\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}}$ (CONNELL, 23).

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$Ly=\tfrac{1}{2}\left[L(1-x+x^2)-L(1+x-x^2)\right]$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+2x}{1-x+x^2}-\frac{1-2x}{1+x-x^2}\right)dx$$

$$dy=\frac{1}{2}(2x-1)\frac{1+x-x^2+1-x+x^2}{(1-x+x^2)(1+x-x^2)}\cdot\frac{(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$=\frac{4x-2}{2\sqrt{(1-x+x^2)(1+x-x^2)^3}}dx$$

189. $y=\dfrac{x}{x-\sqrt{1-x^2}}$ (Church, 25).

Función fraccionaria. Se aplica la regla 9:

$$dy=\frac{(x-\sqrt{1-x^2})-x\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(x-\sqrt{1-x^2})^2}dx$$

$$=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\sqrt{1-x^2})}.$$

190. $y=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^3}}$ (Carr, 263).

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$\mathrm{L}y=\frac{1}{2}\left[\mathrm{L}(1-x^2)-3\mathrm{L}(1+x^2)\right]$$

$$\frac{dy}{y}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{-2x}{1-x^2}-3\frac{2x}{1+x^2}\right]dx$$

$$dy=\frac{-2x\,(2-x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^5\,(1-x^2)}}\,dx$$

191. $$y=\sqrt[4]{\left[a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right]^3}$$ (BRIOT, 157).

Función irracional fraccionaria que se escribe

$$y=[\,a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\,]^{\frac{3}{4}}$$

$$dy=\tfrac{3}{4}\,[\,a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\,]^{-\frac{1}{4}}\,[\,\tfrac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}+\tfrac{2}{3}\,(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}.-2x\,]\;dx$$

$$=\frac{\dfrac{b}{\sqrt{x^3}}-\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}}}{\sqrt[4]{a-\dfrac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)}}}\,dx$$

$$=\frac{3b\sqrt[3]{c^2-x^2}-4x^2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{c^2-x^2}\,.\,x\sqrt{x}\,\sqrt{a-\dfrac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}\,ax$$

192. $$y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$$ (HALL, 12)

Función radical doble. Aplicamos la fórmula 7

$$dy=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}\,dx=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}\,dx$$

193. $$u=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$ (Id. 14)

Función irracional fraccionaria. Aplicamos la misma regla 7:

$$\frac{du}{dx}=\frac{(\sqrt{1+x^2}+1)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-(\sqrt{1+x^2}-1)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}\,dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2}=\frac{2\,(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^3\,\sqrt{1+x^2}}$$

194. $$u=\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x+x^2}}$$ (Id. 14)

Función irracional fraccionaria (regla 7).

$$\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{1+x+x^2}\,\dfrac{-1+2x}{2\sqrt{1-x+x^2}}-\sqrt{1-x+x^2}\,\dfrac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}}{1+x+x2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{(1-x+x^2)\,(1+x+x^2)^{\frac{2}{3}}}}$$

195. $$y=\frac{\sqrt{(x+1)\,(x+3)^9}}{(x+2)^4}$$ (GÓMEZ T., 56)

Función fraccionaria. Aplico L:

$$\mathrm{L}\,y=\tfrac{1}{2}\left[\mathrm{L}\,(x+1)+9\,\mathrm{L}\,(x+3)\right]-4\,\mathrm{L}\,(x+2)$$

$$\frac{dy}{ydx}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+9\frac{1}{x+3}\right)-4\frac{1}{x+2}$$

$$\therefore\ dy=\frac{x^2}{(x+2)^5}\sqrt{\frac{(x+3)^7}{x+1}}\,dx$$

196. $$y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5\,(x-3)^{11}}}$$ (GRÉGORY, 4)

Función irracional fraccionaria. Aplico L:

$$\mathrm{L}y=9\mathrm{L}\,(x-2)-\tfrac{1}{2}\left[5\mathrm{L}\,(x-1)+11\mathrm{L}\,(x-3)\right]$$

$$\frac{dy}{ydx}=9\frac{1}{x-2}-\tfrac{1}{2}\left[5\,\frac{1}{x-1}+11\,\frac{1}{x-3}\right]$$

$$\therefore dy=\frac{(x-2)^8}{\sqrt{(x-1)^7\,(x-3)^{13}}}\,(x^2+7x+1)\,dx$$

197. $$y=\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}\,(x-3)^{\frac{15}{2}}}{(x-2)^8}$$ (BRAHY, 9).

Función fraccionaria irracional *monomia*, por la cual aplicamos log. (L):

$$\mathrm{L}\,y=\frac{5}{2}\mathrm{L}\,(x-1)+\frac{15}{2}\,\mathrm{L}\,(x-3)-8\,\mathrm{L}\,(x-2)$$

Diferenciemos,

$$\frac{dy}{y}=\frac{5}{2}.\;\frac{dx}{x-1}+\frac{15}{2}.\;\frac{dx}{x-3}-8\frac{dx}{x-2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{5\,(x-3)\,(x-2)+15\,(x-1)\,(x-2)-16\,(x-1)\,(x-3)}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}\right]dx$$

Efectuando y sustituyendo el valor de y,

$$dy=\frac{(x^2+4)\,(x-1)^{\frac{3}{2}}\,(x-3)^{\frac{13}{2}}}{(x-2)^9}\,dx$$

198. $y=\dfrac{a+x}{b+x}\sqrt{\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}}$ (PEACOCK, 8)

$$\mathrm{L}\, y=\mathrm{L}\ (a+x)-\mathrm{L}\ (b+x)+\tfrac{1}{2}\left[\mathrm{L}\ (b^2+x^2)-\mathrm{L}\ (a^2+x^2)\right]$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{a+x}-\frac{dx}{b+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{2xdx}{b^2+x^2}-\frac{2xdx}{a^2+x^2}\right)$$

$$=\left[\frac{(b+x)-(a+x)}{(a+x)\ (b+x)}+x\left(\frac{a^2+x^2-b^2-x^2}{(a^2+x^2)\ (b^2+x^2)}\right)\right]dx$$

$$\therefore dy=\frac{(a-b)\left\{(a+b)\ (ab+x^2)\ x-(ab-x^2)^2\right\}}{(b+x)^2\ (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b^2+x^2}}\,dx$$

199. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ (CATALÁN, 116)

o bien,

$$y=\frac{u+x}{u-x}+\frac{u-x}{u+x}=\frac{(u+x)^2+(u-x)^2}{u^2-x^2}=2\frac{u^2+x^2}{u^2-x^2}$$

$$=2\,(2x^2+1)\ \therefore\ dy=2d\ (2x^2+1)=2\ .\ 4xdx\ \therefore\ dy=8xdx.$$

200. $u=\sqrt{ax+\sqrt{bx+\sqrt{ax+\ldots}}}$ (HIND, 5).

Elevemos al cuadrado:

$$u^2-ax=\sqrt{bx+\sqrt{ax+\ldots}}$$

Elevemos nuevamente al cuadrado:

$$u^4-2au^2x+a^2x^2-bx=\sqrt{ax+\sqrt{bx+\sqrt{ax+\ldots}}}=u$$

o bien,

$$u^4-2au^2x-u+a^2x^2-bx=0$$

Suma de funciones, en la que $2au^2x$ es un producto de funciones:

$$4u^3du-2a\ (u^2dx+2xudu)-du+2a^2xdx-bdx=0$$

$$(4u^3-4aux-1)\ du=(2au^2-2a^2x+b)\ dx$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{2au^2-2a^2x+b}{4u^3-4aux-1}$$

III. FUNCIONES TRASCENDENTES

25. Funciones exponenciales.—Cuando la variable está de exponente, la función se llama *exponencial.*

Regla. Para diferenciar una función exponencial, primero se aplican logaritmos y en seguida se diferencia.

Las funciones exponenciales más importantes son a^u, e^u, u^v; en las que u, v son funciones de x.

A). Sea $y=a^u$. Aplicamos logaritmos:

$$\mathrm{L}y = u\mathrm{L}a \therefore \frac{dy}{y} = \mathrm{L}a du$$

$$\therefore d(a^u) = a^u \mathrm{L}a\, du \qquad (10)$$

Luego, la diferencial de la función a^u es igual al producto de la función por el logaritmo de la base y por la diferencial del exponente.

B). Si hacemos $a=e$, resulta $\mathrm{L}e=1$, y

$$d(e^u)=e^u du;$$

y si $u=x$,

$$d(e^x)=e^x dx: \qquad (11$$

es decir, la derivada es igual a la función.

Ejercicio 201. $y=10^x \therefore$ Aplicamos las fórmulas (10):

$$d(10^x)=10^x \mathrm{L}\, 10\, dx.$$

2. $y=(a-b)^{-nx} \therefore d(a-b)^{-nx} = (a-b)^{-nx}\mathrm{L}(a-b)\, d(-nx)$

$$= -n (a-b^{-nx} \mathrm{L}(a-b)\, dx$$

3. $y=a^{fx}. \quad \therefore d(a^{fx})=a^{fx} \mathrm{L}\, a\, f'xdx$

4. $y = \frac{1}{a^u} = a^{-u} \therefore d(a^{-u}) = a^{-u} \mathrm{L} a \, d(-u)$.

5. $y = \sqrt[u]{a} = a^{\frac{1}{u}} \therefore d\left(a^{\frac{1}{u}}\right) = a^{\frac{1}{u}} \mathrm{L}\, a . - \frac{du}{u^2}$.

6. $y = (10\, e)^x \therefore dy = (10\, e)^x \mathrm{L}\,(10\, e)\, dx$

7. $de^{ix} = e^{ix}\, dix = ie^{ix}\, dx$

8. $de^{-ix} = e^{-ix}\, d(-ix) = -ie^{-ix}\, dx$

9. $de^{au-ex} = e^{au-ex}\, d(au-ex) = e^{au-ex}(adu-edx)$.

200. $da^{uv} = a^{uv} \mathrm{L} a\,(udv+vdu)$.

C). $y = u^v$. Aplicamos L:

$$\mathrm{L}y = v\mathrm{L}u$$

$$\therefore \frac{dy}{y} = v\frac{du}{u} + \mathrm{L}udv$$

$$\therefore dy = u^v v\frac{du}{u} + u^v\mathrm{L}udv$$

$$\therefore d(u^v) = u^{v-1}vdu + u^v\mathrm{L}udv.$$

Hacemos $v=n$: se obtiene la fórmula (5):

$$d\,(u^n)=nu^{n-1}du.$$

Hacemos $u=a$: resulta la (10):

$$d\,(a^u)=a^v \mathrm{L} a dv.$$

Ejercicio 211. $y=x^x$.

$$.\,\mathrm{L}y=x\mathrm{L}x \;.\,\dot{}\,.\; \frac{dy}{y}=x\frac{dx}{x}+\mathrm{L}xdx=(1+\mathrm{L}x)\,dx$$

$$.\,\dot{}\,.\; d\,(x^x)=x^x\,(1+\mathrm{L}x)\,dx.$$

Como $1=\mathrm{L}e$, y $\mathrm{L}e+\mathrm{L}x=\mathrm{L}\,(ex)$, se obtiene:

$$d\,(x^x) \quad x^x\,\mathrm{L}\,(ex)\,dx$$

2. $d\,(a+2x)^{a-2x}=du^v=(a+2x)^{a-2x-1}\,(a-2x)\,.\,2dx$

$$+(a+2x)^{a-2x}\,\mathrm{L}\,(a+2x).-2dx$$

3. $D\left(\frac{u}{x}\right)^{ux}=Du^v=\left(\frac{u}{x}\right)^{ux-1}\frac{u}{x}D\frac{u}{x}$

$$+\left(\frac{u}{x}\right)^{ux}\mathrm{L}\frac{u}{x}\,D\,(ux).$$

4. $D\,(u+v)^{u-v}=(u+v)^{u-v-1}(u-v)\,(du+dv)$

$$+\,(u+v)^{u-v}\,\mathrm{L}\,(u+v)\,(du-dv)$$

5. $y=(fx)^{\varphi x}$. $Ly=\varphi x Lfx$

$$\therefore \frac{dy}{y}=\varphi x\frac{f'x}{fx}dx+Lfx\,.\,\varphi' xdx$$

$$\therefore dy=(fx)^{\varphi x}\left(\varphi x\frac{f'x}{fx}+\varphi' xLfx\right)dx$$

D). Exponenciales dobles, triples, etc.

Reciben este nombre las funciones en que el exponente es también una función exponencial.

Ej. 216. $y=e^{e^x}$. Hacemos mentalmente $e^x=u$:

$$d\,(e^{e^x})=e^{e^x}\,d\,(e^x)=e^{e^x}e^x dx$$

7. $de^{x^x}=e^{x^x}dx^x=e^{x^x}(1+Lx)\,x^x dx=e^{x^x}x^x L\,(ex)\,dx$

8. $y=x^{x^x}$. Aplicamos logaritmos

$$Ly=x^x Lx\ \therefore\ \frac{dy}{y}-x^x\frac{dx}{x}+Lxdx^x$$

$$\therefore dx^{x^x}=x^{x^x}(x^{x-1}+x^x\,Lx\,L\,(ex)$$

9. $y=v^{v^z}$. $Ly=v^z Lu$

$$\therefore \frac{dy}{y} = v^z \frac{du}{u} + \mathrm{L}u\left(v^z z \frac{dv}{v} + v^z \mathrm{L}v dz\right)$$

$$\therefore d\,(v^{v^z})\ u^{v^z} v^z\left[\frac{du}{u} + \mathrm{L}\,u\left(z\frac{dv}{v} + \mathrm{L}v dv\right)\right]$$

220. $y = x\sqrt[x]{u} = x^{u^{\frac{1}{x}}}$. Aplicamos la fórmula anterior haciendo $u = z = x$, $v = u$:

$$u^{\frac{1}{x}} = x^{u^{\frac{1}{x}}}\ u^{\frac{1}{x}}\left[\frac{dx}{x} + \mathrm{L}v\ (dx + \mathrm{L}x\,dx)\right]$$

1. $d\,(ae)^x = (ae)^x\ \mathrm{L}\ (ae)\ dx$

2. $d\,(e : a)^u = (ae,^x\ (1 - \mathrm{L}\ a)\ dx$

3. $d\,(10 - e)^{1-x} = (10 - e)^{1-x}\ \mathrm{L}\ (10 - e)\ d\ (1 - x)$.

4. $d\ (x^m.\ e^x) = (x^m e^x + mx^{m-1} e^x)\ dx$

5. $d\ (x^m.\ m^x) = m^x\ x^{m-1}\ (m + \mathrm{L}\ m\ m)\ dx$

6. $d\ (e^{x^e}) = e^{x^e - 1} x^{e-1}\ dx$

7. $d\ (e^{a^x}) = e^{a^x} a^x \angle\, adx$

8. $d\,x\ (^{ax^2+bx+c} = a^{ax^2+bx+c}\ \mathrm{L}\ a\ (2ax + b)\ dx$

9. $D\ \dfrac{e^{x^2}}{x} = \dfrac{x.e.^{x^2} + x - ex^2}{x^2} = e^{x^3}\left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

230. $u = x^{\frac{1}{x}} = x^{x^{-1}}$ (HALL, 28)

$$\mathrm{L}\,u = \frac{1}{x}\mathrm{L}\,x \;\therefore\; \frac{du}{u} = \frac{1}{x}\,\frac{dx}{x} + \mathrm{L}\,x.\,\frac{-dx}{x^2}$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{\mathrm{L}\,x}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x^2}\,(1 - \mathrm{L}\,x)\,dx$$

$$\therefore\; du = x^{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,(\mathrm{L}\,e - \mathrm{L}\,x)\,dx = x^{\frac{1}{x}-2}\,\mathrm{L}\left(\frac{e}{x}\right)dx.$$

26. Funciones logarítmicas.

$$y = \mathrm{L}\,u \;\therefore\; d\,(\mathrm{L}\,u) = \frac{du}{u}.$$

Esta es la segunda fórmula fundamental.

A). Consideremos, en primer lugar, un logaritmo de base cualquiera a i sea la fórmula

$$y = \log_a u$$

Para reemplazar el signo $\log_a$ por L, acudimos a la fórmula inversa $a^y = u$, a la que aplicamos L:

$$y\,\mathrm{L}\,a = \mathrm{L}\,u \;\therefore\; y = \frac{\mathrm{L}\,u}{\mathrm{L}\,a}$$

$$\therefore\; dy = d\,\log_a u = d\,\frac{\mathrm{L}\,u}{\mathrm{L}\,a} = \frac{du}{u\,\mathrm{L}\,a}$$

B). Pero, si $a^x = e \;\therefore\; e^{\frac{1}{x}} = a;$

o bien, tomando logaritmos,

$$x \log_a a = \log_a e, \quad \frac{1}{x}\log_e e = \log_e a;$$

y comó, $\log e_a\, a = 1 = \log_e\, e$, resulta:

$$\log_o e = \frac{1}{\log_a a}.$$

La diferencial anterior se puede escribir así

$$d\,(\log_a u) = \frac{1}{\mathrm{L}_a} \cdot \frac{du}{u} = \log_a e\, \frac{du}{u}.$$

C). Si suponemos $a=10$, tendremos:

$$d\,(\log u) = \log e \frac{dn}{u} = M\, \frac{dx}{x},$$

en la que $M = 0,\ 434\ 294\ 819$.

Ej. 231. $D \operatorname{colog} u = D \log \frac{1}{u} = D\,(-\log u) = -M \frac{1}{u}$.

2. $d \operatorname{co} \mathrm{L}\, u = d\, \mathrm{L}\, 1 : u = d\,(1 - \mathrm{L}\, u) = -\frac{du}{u}$

3. $d \log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} e \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\mathrm{L}\,2}\, \frac{dx}{x}$

4. $y = \log_x x$, o $x^y = x$, o $x^{y-1} = 1 \therefore dy = \dfrac{1-y}{x \operatorname{L} x} dx$

5. $y = \log v$, o $u^y = v \therefore y \operatorname{L} u = \operatorname{L} v$,

$$\therefore y \frac{du}{u} + \operatorname{L} u dy = \frac{dv}{v} \therefore y = \frac{udv - vydu}{uv \operatorname{L} u}$$

D). Logaritmos dobles

236. $y = \operatorname{L}(\operatorname{L} u) \therefore dy = \dfrac{d \operatorname{L} u}{\operatorname{L} u} = \dfrac{du}{u \operatorname{L} u}$

7. $y = \log(\log x) = \log u \therefore dy = M \dfrac{d \log x}{\log x} M^2 = \dfrac{dx}{x \log x}$

8. $y = \log(\operatorname{L} x) = \log u \therefore dy = M \dfrac{d \operatorname{L} x}{\operatorname{L} x} = M \dfrac{dx}{x \operatorname{L} x}$

9. $y = \operatorname{L}(\operatorname{colog} u) = \operatorname{L}\left(\log \dfrac{1}{u}\right) \therefore dy = \dfrac{M : u}{\log 1 : u}$

240. $y = \log_a [\log_b (\log_c u)] = \log_a (\log_b z) = \log_a t$

$$dy = \frac{1}{\operatorname{L} a} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{d \log_b z}{\operatorname{L} a \log_b z} = \frac{dz}{\operatorname{L} a \operatorname{L} b\, z \log_b z}$$

$$= \frac{du}{u \operatorname{L} a \operatorname{L} b \operatorname{L} c \log_c u \log_b (\log_c u)}$$

27. La Diferenciación logarítmica consiste en aplicar logaritmos naturales (L) a las funciones monomias compuestas, con el objeto de descomponerlas en funciones simples, de fácil diferenciación.

Ya hemos visto la importancia que tiene el empleo de estos logaritmos en las funciones

$$uv,\ u:v,\ u^n,\ a^u;$$

que se convierten en las formas sencillas,

$$\mathrm{L}\,u+\mathrm{L}\,v,\ \mathrm{L}\,u-\mathrm{L}\,v,\ n\,\mathrm{L}\,u,\ u\,\mathrm{L}\,a,$$

cuyas diferenciales son:

$$\frac{du}{u}+\frac{dv}{v},\ \frac{du}{u}-\frac{dv}{v},\ n\frac{du}{u},\ \mathrm{L}\,a\,du.$$

Ejercicio 241. $y=u_1u_2u_3\ldots u_n$.

$$\mathrm{L}\,y=\mathrm{L}\,u_1+\mathrm{L}\,u_2+\mathrm{L}\,u_3+\ldots+\mathrm{L}\,u_n$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{du_1}{u_1}+\frac{du_2}{u_2}+\frac{du_3}{u_3}+\ldots+\frac{du_n}{u_n}.$$

2. $y=(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots$ (Sturm, 59).

$$\mathrm{L}\,y=m\,\mathrm{L}\,(x-a)+n\,\mathrm{L}\,(x+b)\quad p\,\mathrm{L}\,(x-c)+\ldots$$

$$\frac{dy}{y}=\left[\frac{m}{x+a}+\frac{u}{x+b}+\frac{p}{x+c}+\ldots\right]dx$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[m(x-b)(x-c)\ldots + n(x-a)(x-c)\ldots]$$

3. $$y = \frac{(a+x)^m (b-x)^n}{(c-x)^p (e+x)^r}$$

$$\mathrm{L}\, y = m\, \mathrm{L}\,(a+x) + n\, \mathrm{L}\,(b-x) - p\, \mathrm{L}\,(c-x) - r\, \mathrm{L}\,(e+x)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{m}{a+x} - \frac{n}{b-x} + \frac{p}{c-x} - \frac{r}{e+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a+x)^{m-1}(b-x)^{n-1}}{(c-x)^{p+1}(e+x)^{r+1}}[m(b-x)(c-x)(e+x)$$

$$-n(a+x)(c-x)(e+x) + p(a+x)(b-x)(c+x)$$

$$-r(a+x)(b-x)(c-x)].$$

4. $$y = \frac{x^3\sqrt{1-x}}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

$$\mathrm{L}\, y = 3\, \mathrm{L}\, x + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{L}\,(1-x) - 2\, \mathrm{L}\,(1+x) - \mathrm{L}\,(1+x^2)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(b-5x-x^2-5x^3+x^4)}{2(1-x^2)(1+x)^2(1+x^2)^2}$$

5. $$y=\frac{(a+x)^3\sqrt{a-x}}{b-x^2)\sqrt[3]{b+x}}$$

$$\mathrm{L}\, y=3\,\mathrm{L}\,(a+x)+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\,(a-x)-\mathrm{L}\,(b-x^2)-\tfrac{1}{3}\,(b+x)$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{3}{a+y}-\frac{1}{2(a-x)}+\frac{2x}{b-x^2}-\frac{1}{3\,(b+x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5(b-x^2)\,[5b\ \ 2a)a+(5a-7b)x-9x^2]+1\ 2x(b+x)(a^2-x^2)}{6\,(a+x)^{-2}\,(b+x)^{\frac{4}{3}}\,(a-x)^{\frac{1}{2}}\,(b-x^2)^2}$$

6. $$y=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{b+x}{b-x}}.$$ (LAMB, 91)

$$\mathrm{L}\, y=\tfrac{1}{2}[\mathrm{L}\,(a+x)+\mathrm{L}\,(b+x)-\mathrm{L}\,(a-x)-\mathrm{L}\,(b-x)]$$

$$\frac{dy}{y}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{a^2-x^2}+\frac{b}{b^2-x^2}\right)=\frac{(a+b)\,(ab-x^2)}{(a^2-x^2)\,(b^2-x^2)}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{(a+b)\,(ab-x^2)}{(a-x)^{\frac{3}{2}}\,(b-x)^{\frac{3}{2}}(a+x)^{\frac{1}{2}}\,(b+x)^{\frac{1}{2}}}$$

7. $$y=\sqrt{\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}}=\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$ siendo $z=\dfrac{u}{v}$.

$$\mathrm{L}\, y=\tfrac{1}{2}\,[\mathrm{L}\,(z^2+1)-\mathrm{L}\,(z^2-1)$$

$$\frac{dy}{y}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{2z}{z^2+1}-\frac{2z}{z^2-1}\right]dz=z\ \frac{-2}{z^4-1}\ dz$$

$$dy=-\frac{u}{v}\ \frac{2}{\dfrac{u^4}{v^4}-1}\ d\,\frac{u}{v}=-\ \frac{u}{v^3}\cdot\frac{2}{u^4-v^4}\cdot\frac{vdu-vdu}{v^2}$$

$$\therefore\ dy=\frac{-2\ u\ (vdu-udv)}{v^3\ (u^4-v)^4}$$

8. $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^x$ (Catalan, 123)

$$L\ y=x\left[\,L\ (x^2+1)-L\ x\,\right]$$

$$\frac{dy}{ydx}=x\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right)+L\ \frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2-1}{x^2+1}+L\ \frac{x^2+1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}+L\ \frac{x^2+1}{x}\right)$$

9. $$y=\frac{v^u}{au^v}\ \therefore\ Ly=uLv-La-vLu$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{udv}{v}+Lv\ du-v\ \frac{du}{u}-L\ udv$$

$$=\left(\frac{u}{v}-Lu\right)dv+\left(\frac{v}{u}-Lv\right)du$$

$$dy = \frac{v^u}{au^v}\left(\frac{u - Lu^v}{v}\cdot dv - \frac{vLv^u}{u}\,du\right)$$

250. $$y = (aLx - b)^{L\,(a-bx)}$$

$$Ly = L\,(a - bx)\,L\,(aLx - b)$$

$$\frac{dy}{y} = L\,(a - bx)\,\frac{adx}{(aLx - b)\,Lx} - L\,(aLx - b)\,\frac{bdx}{a - bx}$$

$$\frac{dy}{dx} - (aLx - b)^{L\,(a-bx)}\;\frac{L\,(a - bx)^a - L\,(aLx - \text{[illegible]}}{(a - bx)\,(aLx - b)\,L\,x}$$

28 Funciones trigonométricas.—Para diferenciar esta clase de funcionss emplearemos primeramente el siguiente

Método elemental.—LEMA I. El coseno y la secante de un arco infinitesimal son iguales a la unidad.

$$\cos dx = \sec dx = 1.$$

Demostración. Sabemos que el coseno es la inversa de la secante,

$$\cos x = \frac{1}{\sec\ x};$$

y que si el arco disminuye indifinidamente o tiende a cero ($\longrightarrow$ o), el coseno aumenta indefinidamente y se hace igual a la unidad; y la secante disminuye y se hace también igual a la unidad; luego, cuando el arco es infinitesional, se verifican las relaciones

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \text{o} \quad \cos dx = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \sec x = 1 \quad \text{o} \quad \sec dx = 2$$

$$\therefore \cos dx = \sec dx = 1$$

LEMA II. **El seno y la tangente de un arco infinitesimal son iguales al arco.**

$$\text{sen } x = \text{tg } x = dx.$$

Demostración. Tenemos

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \;\therefore\; \text{sen } x = \cos x \,\text{tg } x.$$

Si el arco es infinitesimal, escribimos.

$$\text{son } dx = \cos dx \,\text{tg } dx$$

Según lema I, $\cos dx = 1$,

$$\text{sen } dx = \text{tg } dx;$$

y como el arco esta comprendida entre el seno y la tangente, resulta.

$$\text{sen } dx = dx = \text{tg } dx.$$

Diferencial del seno.—Sea la función

$$y=\text{sen } u.$$

Si u aumenta su valor en du, y lo aumentará en dy:

$$y+dy=\text{sen } (u+du)$$

$$=\text{sen } u \cos du+\text{sen } du \cos u.$$

Según los lemas anteriores, $\cos du=u$, $\text{sen } du=du$:

$$y+dy=\text{sen } u+\cos udu.$$

Restamos la función primitiva.

$$dy=\cos u\, du$$

o $$d\,(\text{sen } u)=\cos u\, d\, u \tag{12}$$

Luego, la diferencial del sevo es igual al coseno por la diferencial del arco.

Ejercicio 251. $y=\text{sen } x \quad .\cdot. \quad dy=\cos x\, dx$

2. $d \text{ sen } au=\cos au\, dau=a \cos a\, u\, d\, u.$

3. $d \text{ sen } (ux+a)=\cos (ux+a)\, d\, (ux+a)=n \cos (n+xa)\, dx.$

4. $d \text{ sen } (1-x)=\cos (1-x)=-\cos (1-x)\, dx$

5. $d \operatorname{sen} x^2 = \cos x^2 \times x^2 = 2x \cos x^2\, dx$

6. $d \operatorname{sen} \sqrt{x} = \cos \sqrt{u}\, d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$

7. $d \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \operatorname{sen} 2x\, dx$

8. $d\, a \operatorname{sen}^m x^n = am. \operatorname{sen}^{m-1} x^n \cos x^n\, dx^n$

$= amn\, x^{n-1} \operatorname{sen}^{m-1} x^n \cos x^n\, dx$

9. $d \operatorname{sen} L x = \cos L x\, d\, L x = \cos L x \dfrac{dx}{x}$

260. $d\, L \operatorname{sen} x = \dfrac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos x dx}{\operatorname{sen} x} = \cot x\, d\, x.$

1. $y = a^{\operatorname{sen} u}$. Aplicamos logaritmos.

$\mathrm{L}\, y = \operatorname{sen} u\, \mathrm{L}\, a \quad \therefore \quad dy = \mathrm{L}\, a \cos u du$

$\therefore \quad da^{\operatorname{sen} u} = a^{\operatorname{sen} u}\, \mathrm{L}\, a \cos u du$

2. $y = (\operatorname{sen} u)^x \quad \therefore \quad \mathrm{L}\, y = x\, \mathrm{L} \operatorname{sen} u$

$$\frac{dy}{y} = x \frac{d \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u} + \mathrm{L} \operatorname{sen} u dx = x \cot u du + \mathrm{L} \operatorname{sen} u dx$$

$$\therefore\ dy = \text{sen}^x u\,(x \cot u du + \text{L sen } u dx)$$

3. $y = (\text{sen } x)^{\text{sen } x}$. $\therefore$ $\text{L } y = \text{sen } x \text{ L sen } x$

$$\frac{dy}{y} = \text{sen } x \cot x dx + \text{L sen } x\,(\cos x dx) = \cos x\,(1 + \text{L sen } x)$$

$$d \text{ sen } x^{\text{sen } x} = \text{sen } x^{\text{sen } x} \cos x\,(1 + \text{L sen } x)$$

4. $y = \dfrac{\text{sen } x}{x}$. $dy = \dfrac{x \cos x - \text{sen} x}{x^2} dx$

265. $y = \dfrac{x \text{ sen } (90^\circ - x)}{\sqrt{\text{sen } (90^\circ + x)}}$. Apliquemos logaritmos:

$$\text{L } y = \text{L } x + \text{L sen } (90^\circ - x) - \tfrac{1}{2} \text{ L sen } (90^\circ + x)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{\cos (90^\circ - x)\, d\,(90 - x)}{\text{sen } (90^\circ - x)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos (90^\circ + x)\, d\,(90^\circ + x)}{\text{sen } (90^\circ + x)}$$

$$\frac{dy}{ux} = \frac{x \cos x}{\sqrt{\cos x}}\left[\frac{1}{x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} - \frac{1}{2}\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right]$$

$$= x\sqrt{\cos x}\left[\frac{1}{y} - \frac{3}{2}\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right] = \sqrt{\cos x} - \frac{3}{2} x \frac{\text{sen } x}{\sqrt{\cos x}}$$

Diferencial del coseno. Como $\cos u = \operatorname{sen}(90^\circ - u)$, tendremos:

$$d \cos u = d \operatorname{sen}(90^\circ - u) = \cos(90^\circ - u)\, d\,(90^\circ - u).$$

Pero, $\cos(90^\circ - u) = \operatorname{sen} u$; y $d\,(90^\circ - u) = -du$:

$$\therefore\ d\,(\cos u) = -\operatorname{sen} u\, du \qquad (13)$$

La diferencial del coseno es igual a menos el seno por la diferencial del arco.

Ejerc. 266. $y = \cos(ax+b)$ $\therefore$ $dy = -\operatorname{sen}(ax+b)\, d\,(ax+b)$

$$= -a \operatorname{sen}(ax+b)\, dx.$$

(*Continuará*)