Rodolfo Iturriaga Jamett

Profesor de la Universidad de Chile

De Euclides a Lobatchefsky

La historia de un postulado

Introducción

Tal vez ningún aspecto de la geometría, sea más apasionante, que la historia del postulado de las paralelas. Durante más de veinte siglos, matemáticos de todas las nacionalidades, ahondaron en el complejo problema que él entraña e hicieron temblar, con la sutileza de sus pensamientos, el recio templo griego creado por Euclides.

Esta historia comienza en los ya lejanos tiempos de la grandeza helénica, cuando el espíritu penetrante y sutil de ese pueblo escogido, meditaba en el extraño y hondo problema de los hombres y las cosas y cuando con mirada soñadora abarcaba extasiado el escenario maravilloso del Universo que lo rodeaba. Quizás si por lo mismo que fue soñador, fue más geómetra que aritmético.

Su espíritu crítico llevó al griego a examinar las proposiciones fundamentales que servían de base a la geometría. Ella le enseñaba que dos rectas paralelas no se cortaban: pero también sabían que la hipérbola y la concoide tenían sus asíntotas y pensaron, no sin razón, que así como estas curvas se acercaban indefinidamente a estas rectas, sin cortarlas, también podrían existir dos rectas que no cortándose se comportaran asintóticamente. Atormentados por la duda y acicateados por ese grupo de cínicos geniales, los sofistas, que siguiendo razonamientos análogos a los que usaban para sus clásicas paradojas, mostraban a sus contemporáneos, que dos rectas convergentes cualquiera no se cortaban por más que se prolongaran, pusieron el empeño de su ingenio y en sus esfuerzos por demostrar el axioma de las paralelas que no resultaba evidente como el resto de las proposiciones euclidianas. Así, en medio de un esfuerzo vano fueron pasando los siglos. Vino la decadencia griega y sus herederos los árabes, continuaron en el mismo empeño: pero este pueblo no tenía la estructura geométrica del heleno y aun cuando varios de ellos hicieron intentos dignos de consideración no tuvieron, ni el vuelo penetrante de la concepción sutil ni la fantasía espacial de que hicieron gala los matemáticos griegos.

De los árabes a las escuelas italianas y francesas del Renacimiento, el postulado de las paralelas pasó como un punto débil y tembloroso en la estructura granítica del edificio geométrico. En 1733, un jesuita, el padre Gerolamo Saccheri, cambió de rumbo en las investigaciones hechas hasta su época. Hasta entonces, desde el griego Posidonio, pasando por el árabe Nasir-Eddin y llegando hasta el inglés Wallis, los esfuerzos consistieron en tratar de demostrar el postulado, dejándolo en calidad de teorema. Esto se consiguió: pero a costa de sustituir esta proposición fundamental por otra, lo que no solucionaba el fondo mismo del problema. Así, algunos postularon la equidistancia para entrar a definir con él las rectas paralelas (concepto que no entra en la definición euclidiana de paralelismo), otros postularon la semejanza y no faltaron quienes recurrieran al axioma de Arquímedes con todo lo cual no hicieron otra cosa que dejar el problema en su punto de partida. Saccheri cambia de rumbo y hace la aplicación más brillante del razonamiento por reducción al absurdo. El razona así: si aceptando el postulado de las paralelas se llega a que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, a la inversa partiendo de la suma de los ángulos interiores deberá llegarse al postulado. Y razonando así, él toma los tres caminos posibles: 1º la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que dos rectos; 2º esta suma es igual a dos rectos, y 3º la suma es mayor que dos rectos. A estas tres hipótesis las llama respectivamente "hipótesis del ángulo agudo"; "hipótesis del ángulo recto" e "hipótesis del ángulo obtuso"[1]. El geómetra italiano logra demostrar lo absurdo de la hipótesis del ángulo obtuso; demuestra que en la hipótesis del ángulo recto se llega a la proposición euclidiana: pero no llega a ningún absurdo en la hipótesis del ángulo agudo y trata de justificarse con razonamientos no muy convincentes, que esta hipótesis es también falsa. Saccheri habría sido el verdadero fundador de estas disciplinas geométricas si su época hubiera estado preparada para las nuevas concepciones. El arrastre milenario de las ideas lo dejó sólo en calidad de precursor.

Es difícil para el hombre aceptar lo que la experiencia parece contradecir o luchar con pensamientos e ideas tras las cuales hay siglos de tradición y existencia. Sin embargo, hay en el hombre un afán incontenible de fuerza interior que lo hace caminar tras la verdad y llega un momento en que las ideas se abren camino y afloran triunfantes. Este es el caso, ya el ambiente se está preparando, ya van y han ido cayendo las viejas ideas en todo orden de cosas y en todas las manifestaciones del espíritu. Copérnico ha sustituido a Ptolomeo, Galileo ha rectificado a Aristóteles. Newton ha penetrado en el microcosmos matemático, la lente ha urgado en el mundo desconocido de los microbios y ha derrumbado viejas teorías, los sistemas políticos milenarios ya acusan una crisis precursora de una próxima hecatombe, hay en todo orden de cosas un espíritu de renovación total y en las ciencias físicas aun cuando todavía no nace el electrón, el hombre ya tiene un ancho campo abierto que va desde el diminuto átomo indivisible hasta las distancias ilimitadas y sin fin de los espacios estelares. Se ha abierto el horizonte científico, el espíritu ya está preparado para nuevas concepciones. No es pues extraño que sea el siglo XIX el que diera nacimiento y vida a las nuevas geometrías, ni es coincidencia tan asombrosa, que fueran tres los matemáticos, los que en investigaciones separadas y sin tener conocimiento uno del otro, crearan edificios de igual arquitectura. Lobatchefsky en Rusia, Gauss en Alemania y Bolyai en Hungría crean una nueva geometría independiente del postulado de las paralelas y análogas a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri, solo que ahora ya está el edificio completo, es la expresión de una idea ya elaborada y concebida con claridad y nitidez de pensamiento, es la fantasía espacial que abriéndose en abanico en las regiones siempre maravillosas de la imaginación ha creado paisajes extraños. El ángulo que faltaba lo llenó Riemann en 1854 al leer su memoria de incorporación académica en Göttingen en la que se refería a una nueva geometría y que correspondía a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri: pero ahora volando libre en el mundo que le correspondía y no aprisionada al espacio estrecho de la geometría euclidiana.

El Universo, éste que vivimos, no lo conocemos, sólo sabemos que en este pequeño campo que abarcamos, las figuras parecen comportarse como lo dice Euclides y que el espacio tridimensional que captamos parece tener curvatura cero: pero también podría afirmarse, si no supiéramos por otros medios, que es falso que el trozo de tierra en que caminamos a diario es plano, sin curvatura ¿quién nos dice pues, si no estamos viviendo en un mundo espacial de curvatura constante negativa que fuera como una gran montura cósmica? ¿o si a la inversa nos encontramos dando vueltas en un mundo de curvatura positiva en que los rayos luminosos vayan y vuelvan al lugar de su nacimiento? Ya Einstein ha supuesto que este Universo nuestro es así, mundo extraño en constante y continua expansión cuya forma quizás nunca conoceremos. Razón tenía el griego Platón cuando decía que sólo captábamos sombras en este mundo de apariencias.

En la exposición de la evolución del pensamiento geométrico que expongo a grandes rasgos he querido analizar primeramente la naturaleza de las proposiciones fundamentales euclidianas porque sólo así se consigue captar la naturaleza misma de las nuevas disciplinas.

Euclides y los elementos

En la célebre Escuela de Alejandría, Euclides dictó sus lecciones y escribió sus Elementos, la obra de mayor elegancia severa y concatenación lógica que registra la historia. Muy poco se sabe de la vida de este

[1]La figura de partida de Saccheri es en realidad el cuadrilátero birrectángulo isósceles: pero que equivale a lo mismo en cuestión, ya que de ella Saccheri pasa directamente al triángulo.

sabio genial. Se ignora la fecha en que nació, no se conoce ni el lugar de su procedencia, ni quiénes eran sus padres, ni la fecha de su muerte. Muy poco se conoce de su juventud y de los pormenores de su vida. Se le confundió largo tiempo con Euclides de Megara, filósofo discípulo de Sócrates. Algunos escritores árabes lo supusieron natural de Tiro e hijo de Naucrates, comerciante de Damasco; pero no presentan ninguna prueba al respecto, lo que hace suponer falsa esta hipótesis. Lo cierto es que hacia el año 325 a J. C. lo encontramos en Alejandría dictando sus lecciones. La leyenda lo ha rodeado de anécdotas, que si no son totalmente verídicas, al menos muestran el profundo respeto y admiración que inspiraba este sabio.

El mérito de este geómetra no está precisamente en la sutileza de sus concepciones, de las que hizo gala Arquímedes o Apolonio, ni en la originalidad de las materias que trató, sino en el espíritu lógico que revela su obra[2].

Las proposiciones tienen en los Elementos su estricto lugar, ni antes ni después del que les corresponde. Las 28 primeras las demuestra valiéndose únicamente de la superposición y de aquellas proposiciones independientes del concepto de paralelismo que tanto y tan hondos problemas debía originar más tarde. No hay duda, atendiendo a la definición misma que dio Euclides de paralelas y al orden en que desarrolló sus proposiciones, que este matemático vislumbró el complejo y profundo problema que entraña la teoría del paralelismo y que sólo vino a encontrar solución veinte siglos más tarde.

Los Elementos fueron traducidos primeramente al árabe y en seguida a todos los idiomas. En 1120 Abelardo de Bath los tradujo por primera vez al latín de un texto árabe que encontró en Córdoba y que pudo obtener disfrazado de estudiante musulmán. En cuanto a los manuscritos griegos fueron encontrados más tarde en Oriente, en el siglo XII. En el siglo XVII los misioneros jesuitas de la China lo tradujeron al tártaro para el emperador Kang-Hy que admiraba grandemente la obra del sabio alejandrino.

A partir del siglo XIII y en especial durante los siglos XVI y XVII se hicieron en Occidente numerosas ediciones en latín y griego, traducciones que se efectuaron del árabe y del griego directamente. Esta obra ha sido traducida a todos los idiomas y en cuanto a difusión no hay obra didáctica que pueda aventajarla.

Los elementos

Consta de trece libros, de los cuales el 1º contiene todas las proposiciones más importantes de la teoría del paralelismo como asimismo todo lo referente a los triángulos y paralelógramos. El 2º trata de los métodos para resolver ecuaciones mediante la construcción geométrica. El 3º se refiere al círculo; el 4º trata de los polígonos regulares; el 5º de las proporciones; el 6º de la semejanza; los libros 7º, 8º y 9º están dedicados a la teoría de los números racionales, series y progresiones; el 10º se preocupa de los números irracionales en relación con la construcción de polígonos y poliedros regulares; el 11º de la geometría del espacio; el 12º de la teoría de las aproximaciones y el 13º de la construcción de los polígonos y poliedros regulares, de acuerdo con los resultados del libro 10º.

A esta obra se le agrega un 14º libro de Hypsicles (que trata de los teoremas de Apolonio) y un 15º de un autor de media-

[2]Además de los Elementos, Euclides escribió también un tratado que intituló Datos y que generalmente se publica junto con los Elementos. En él se encuentran los elementos necesarios para la construcción de problemas geométricos, desarrollando el método analítico innovado que aplicaba y desarrolló con éxito la escuela platónica. Todavía Pappus habla de cuatro libros sobre "Secciones Cónicas", de dos sobre "Lugares en la Superficie" y un tratado que se compone de tres libros. "Los Porismos", obras que sólo se conocen por referencias o fragmentos. Todavía pueden mencionarse su "División" de las figuras, su "Fenómenos" y la "Optica" (Historia de las Matemáticas. H. Wieleitner).

Euclides midió con Eratóstenes el radio de la Tierra con cierta aproximación, aun cuando muchos autores opinan que estos resultados se debieron a errores de cálculo. De tal opinión es el distinguido prof. Miller: "... A considerable part of the development of mathematics is connected wich accurate measurements, but the Greeks did not make much progress along this line. They made various attempts to measure the circumference of the earth, but they failed to secure accurate results in measuring distances on the earth as well as in measuring angles subtended by heavenly bodies. It is sometimes said that. Eratosthenes found the circumference of the earth to a very close degree of aproximation. It seems almost certain tha this was not the case, but even if it were true, it would doubtless have been due to the compensation of errors in his work and not accurate measurements. The painstaking care which the modern scientist employs in making accurate measurements was foreign to the Greek mind. They devoted their attention to the shorter and easier routes leading to scientific truths." (G. A. Miller, University of Illinois U.S.A. art. public. en la rev. Scientia. Vol. XXXIX 1-V-1926).

na importancia natural de Damasco y que vivió en el siglo VI de nuestra era.

El texto empieza con las definiciones de los elementos fundamentales que sirve de base a la geometría y a continuación enuncia los principios en que se funda esta ciencia, principios que divide en dos grupos: las PETICIONES y las NOCIONES COMUNES, que transcribimos más adelante.

Entre las treinta y cinco definiciones, la número 34 dice:

"Rectas paralelas son aquellas que se encuentran en el mismo plano y que no se cortan por más que se prolongan"[3].

A continuación enuncia las proposiciones fundamentales divididas en dos categorías:

PETICIONES (αἰτήματα)

Se pide poder:

1º Trazar una línea recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

2º Prolongar indefinidamente, siguiendo su dirección, una línea recta finita.

3º Describir un círculo con un punto cualquiera como centro y con una distancia cualquiera (como radio).

NOCIONES COMUNES (κοιναὶ ἔννοιαι)

1º Cantidades iguales a una misma cantidad son iguales entre sí.

2º Si a cantidades iguales se agrega cantidades iguales, las sumas serán iguales.

3º Si de cantidades iguales se restan cantidades iguales, las diferencias serán iguales.

4º Si a cantidades desiguales se agregan cantidades iguales, las sumas serán desiguales (en el mismo sentido).

5º Si de cantidades desiguales se restan cantidades iguales, las diferencias serán desiguales (en el mismo sentido).

6º Las cantidades que son dobles de una misma cantidad son iguales entre sí.

7º Cantidades que son mitades de una misma cantidad son iguales entre sí.

8º Magnitudes que pueden hacerse coincidir una con otra son iguales entre sí.

9º El todo es mayor que la parte.

10. Todos los ángulos rectos son iguales.

11. Si dos rectas son cortadas por una tercera, que forma con ellas dos ángulos interiores de un mismo lado (de la transversal), cuya suma es menor que dos ángulos rectos, estas dos rectas, prolongadas indefinidamente, concluirán por cortarse del lado en que ellas forman los dos ángulos que en conjunto valen menos de dos ángulos rectos.

12. Dos rectas no pueden encerrar un espacio.

[3]Nótese que no se introduce en ella el concepto de equisdistancia.

Breve comentario a las proposiciones euclidianas

Es oportuno decir desde luego que el primer grupo formado por las Peticiones constituyen los principios que conocemos corrientemente con el nombre de postulados (mas las proposiciones X, XI y XII) y el grupo de las Nociones Comunes corresponde a los principios que se llaman axiomas en la terminología tradicional de la geometría (menos las tres últimas proposiciones).

Las distintas versiones de los Elementos no coinciden en cuanto al orden ni al número de Peticiones y Nociones Comunes. Así por ejemplo en la traducción latina hecha por Campano en el siglo XIII, a base de los textos árabes, esta proposición figura como postulado V. "Otro tanto ocurre, dice Bonola[4] en la traducción latina hecha del griego por B. Zamberti (1505), en las ediciones de Luca Paciolo (1509), de N. Tartaglia (1543), de F. Commandino (1572), de A. Borelli (1658)".

"En cambio en la primera impresión de los Elementos en lengua griega (1553) contiene la hipótesis entre los axiomas (axioma XI). Sucesivamente la colocan entre los axiomas Candalla (1556), C. Clavio[5] (1574), Giordano Vitale (1680) y también Gregory (1703) en su clásica versión latina de las obras de Euclides".

La excelente traducción de R. Simson ubica esta proposición como axioma XI y en cambio en otras como en las de Heiberg (1883) figura como postulado V (Teubner 1883). En las ediciones de Peyrard de 1809 figura como axioma XI en unas y XII en otras y como postulado V en las traducciones del mismo Peyrard de 1814 o en la gran edición de 1816 en texto griego, francés y latín.

Por esta razón al tratar de la proposición XI de las Nociones Comunes hablaremos

[4]R. Bonola: Geometrías no euclidianas. Pág. 22.

[5]En la edición de Clavio figura como axioma XIII. (Nota de Boccardini, pág. 1. del Euclide Emendato).

indiferentemente del postulado V o axioma XI.

Esta diferente ubicación se debe a los copistas y a la interpretación que los comentadores y traductores de la obra de Euclides, dieron a las proposiciones. Se origina así una diferencia de apreciación de los traductores que varía según el texto del cual han hecho la versión. Así por ejemplo, Hoüel coloca las tres últimas proposiciones entre las nociones fundamentales, las que según este matemático francés se encontrarían ahí bien ubicadas por estar de acuerdo con el espíritu que inspira la obra de Euclides, no aceptando la opinión de Peyrard que las mantuvo primeramente en esta forma, pasándolas después a las Peticiones en atención al resultado obtenido por el estudio de ciertos manuscritos[6].

Es probable que la razón de tales discrepancias de los primeros comentadores se deban a la manera diferente de entender el axioma del postulado entre los griegos.

Según Proclo entre postulado y axioma existe la misma relación que entre problema y teorema, o sea, que el *postulado afirmaría la posibilidad de una construcción.*

Una segunda manera sería la que con más frecuencia se encuentra en los textos corrientes, según la cual *postulado sería una proposición evidente de contenido geométrico,* mientras que *el axioma es una proposición evidente común lo mismo a la geometría que a la aritmética.*

Y una tercera distinción sería la sostenida por Aristóteles según la cual el *axioma es lo que es verdadero por sí mismo mientras que postulado es aquella proposición que sin tener el grado de evidencia de un axioma se admite sin demostración.*

Ya sea que se admita una u otra forma, las proposiciones cambian de ubicación en los dos grupos.

De acuerdo con la primera forma de diferenciarlos, las tres peticiones merecen el nombre de postulados. La proposición X (que no sería postulado a la manera de Proclo) parece a primera vista superflua, sin embargo analizándola más a fondo se ve que Euclides tuvo una visión clara y profunda de los fundamentos de la geometría. El ángulo recto está ligado a la naturaleza del plano. Postular la igualdad de los ángulos rectos equivale a establecer la igualdad de planos en que van a moverse las figuras. La naturaleza de las rectas que van trazándose en ellos y los planos mismos, son condiciones previas para el establecimiento y la coordinación de las relaciones métricas o de cualquier orden que se establezcan. La elección de sus proposiciones revela claramente el concepto que los griegos tenían de la ciencia del espacio.

Las otras proposiciones XI y XII entrañan un problema más complejo. La proposición XI más conocida por postulado V, pertenece a un género casi intermedio entre las del primero y segundo grupo.

Enunciada en la forma que la da Euclides afirma la posibilidad de una construcción: Pide encontrar el punto en que se cortan dos rectas atravesadas por una transversal cuando los ángulos del mismo lado de ella suman menos dos rectos.

De esto resultaría que esta proposición pertenece al género de los postulados siguiendo la clasificación de Proclo. Sin embargo hay todavía una diferencia marcada entre ella y las Peticiones y es que implica una condición: que las rectas deben estar cortadas por una transversal y que los ángulos interiores del mismo lado de ella sumen menos de 180°. Tal carácter no tiene ninguna de las Peticiones.

Resulta de esto que en cierto sentido se parece a las Nociones Comunes y en parte a las Peticiones, o sea, es casi un género intermedio entre ambas, entendidas a la manera de Proclo.

La proposición XII afirma en el fondo la negación de una construcción. En efecto equivale a decir que dos rectas no tienen dos puntos comunes, es decir, que no es posible encontrar dos puntos de intersección de dos rectas. En tal situación no cabría colocarla entre las Peticiones. Esta proposición define implícitamente la naturaleza de la línea recta y en consecuencia del plano en que ella se extiende. De acuerdo con ella la recta se prolonga indefinidamente sin volver sobre sí misma.

Examinemos ahora la segunda manera de distinguir el axioma del postulado, o sea, que el postulado es una proposición de contenido geométrico, mientras que el axioma es una proposición común los mismo a la geometría que a la aritmética.

Aceptando esta manera de diferenciarlos las tres Peticiones y las proposiciones VIII; X; XI y XII de la Nociones Comunes caerían bajo la denominación de postulados,

[6]Para cuanto se refiera al estudio de las proposiciones fundamentales, hemos seguido la ubicación que les da Hoüel. Para el resto, hemos seguido la excelente versión de Simson.

mientras las otras proposiciones merecerían el nombre de axiomas.

Algunos geómetras creen por esta razón que algunos comentaristas de los Elementos han agregado estas proposiciones a las Nociones Comunes. Sin embargo debemos decir que Proclo y Gemino sostienen que ellas pertenecen al ilustre geómetra griego.

De lo anterior parecería a primera vista que tal clasificación simplificaría toda discusión, con tal de colocar estas proposiciones de las Nociones Comunes entre las Peticiones. Pero en el fondo la esencia del problema que analizamos no es de nombre. Lo que interesa en las proposiciones fundamentales es la fuerza de evidencia con que se nos imponen y es en este punto precisamente donde está la dificultad. Si nosotros decimos: postulado es una proposición que pertenece a la geometría, no hemos dicho nada importante, ya que tal carácter lo tienen también los teoremas; pero si decimos: es una verdad evidente que pertenece a la geometría, habremos expresado algo que en el fondo encierra un complejo problema, puesto que no hay tal evidencia para algunas de ellas. Por otra parte las Nociones Comunes, aplicadas en el campo geométrico requieren otras proposiciones previas para que se impongan claramente y con fuerza a nuestro espíritu.

Veamos la tercera manera de distinguirlos debida a Aristóteles: axioma es lo que es verdadero por sí mismo, mientras que postulado es lo que no siendo un axioma se admite sin demostración.

Esto significaría que entre estas dos clases de principios sólo existe una diferencia de grado de evidencia y no de naturaleza. Pero ¿hasta qué punto una proposición se nos impone como evidente? ¿Y hasta qué punto no teniendo tal fuerza convincente se impone como verdadera?

Con tal criterio ninguna de las Peticiones resulta ahora imponiéndosenos como evidentes. ¿Puede en efecto una línea recta prolongarse indefinidamente siguiendo su dirección? Depende de la naturaleza del plano definido. Para seres de dos dimensiones que habitaran la superficie de una esfera de radio suficientemente grande, las rectas serían círculos máximos que podrían prolongarse indefinidamente en su dirección; pero de longitud finita. En tal plano no sería verdadera la Petición 2 ni 3; ni la proposición XII de las Nociones Comunes.

En cuanto a la evidencia de las Nociones Comunes, ella desaparece en el aspecto geométrico, a menos que el plano en que se mueven las figuras sea de curvatura constante, homogéneo isótropos, etc., y siempre que se postule igualmente el movimiento sin deformación de las figuras, condiciones que no establece previamente Euclides.

Es tan difícil precisar el grado de evidencia de las proposiciones fundamentales que la clasificación de Aristóteles es la menos adecuada.

Por ahora sólo diremos que se ha borrado toda distinción entre axioma y postulado entendiéndose por axioma todo principio fundamental que se acepte como verdadero, ya sea que se aplique a la magnitud espacial o a la cantidad discontinua. Esto significa que se habla indiferentemente de axioma o postulado para referirse a una proposición que se acepta como verdadera.

Significado de las proposiciones euclidianas

Ya hemos visto como las preposiciones fundamentales cambian de ubicación en los dos grupos de principios que estableciera el geómetra griego. Veamos ahora el significado de estas proposiciones, algunas de las cuales parecen innecesarias y superfluas en apariencias; pero que analizadas más a fondo permiten apreciar el genio de Euclides.

La definición 4 que se refiere a la línea recta dice:

"Línea recta es la que está situada semejantemente con relación a todos sus puntos".

Esta definición no tiene suficiente claridad. Parece que ella quiere significar que está compuesta idénticamente en todos sus puntos en cuanto a continuidad y dirección, lo que permitiría poder superponerla a sí misma trasladándola en su dirección, cualidad que es por otra parte consecuente con todas las demás propiedades de la recta.

A veces se encuentra en algunos textos la siguiente definición: "línea recta es la distancia más corta entre dos puntos", definición que no pertenece al geómetra griego y que como hace notar el eminente matemático francés Hoüel[7] equivale a enunciar las condiciones mínimas de la integral:

$$\int^{b} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

[7]Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. J. Hoüel (Gauthiers-Villars, 1883).

Esta definición tiene indudablemente un origen experiencial ya que nuestros sentidos parecen corroborar esta afirmación: que el camino más corto entre dos puntos dados sea la línea recta; pero desde el punto de vista geométrico el problema es otro: esta propiedad no es inherente a ella. En efecto, en una superficie curva la distancia más corta no es precisamente la recta y no por eso deja de existir aquel concepto[8].

Aun la propiedad de coincidir con ella misma en su dirección no es una cualidad que le pertenezca absolutamente a la recta, pues las líneas no rectas de curvatura constante pueden satisfacer esta condición. Se ve pues que esta definición es incompleta, insuficiente y oscura[9].

La otra definición que nos interesa especialmente es la de rectas paralelas:

"Rectas paralelas, dice Euclides, son aquellas que se encuentran en el mismo plano y que no se cortan por más que se prolongan"[10].

Como puede verse ella es independiente del concepto de equidistancia. Las definiciones que introducen esta noción y que aparecen en algunos textos, nada tienen que ver con la dada por el geómetra alejandrino. Ya Posidonio (siglo I a J. C.), al decir Proclo, trató de introducir el concepto de equidistancia al definir el paralelismo y Nasir-Eddin (siglo XIII), como también Borelli, Cataldi y Giordano Vitale en el siglo XVII recurren igualmente a ella al tratar de demostrar el postulado V o axioma XI.

La independencia entre estos dos conceptos (paralelismo y equisdistancia) que hacía meditar a Gemino (siglo I a J. C.) en la probable existencia de rectar paralelas coplanarias que podrían comportarse entre sí como las asíntotas de la hipérbola o la concoíde con sus respectivas curvas —temor estimulado por los sofistas que con razonamientos sutiles para su tiempo trataron de demostrar que dos rectas convergentes cualesquiera no se cortaban por más que se prolongaran— contribuyó a que los griegos se dedicaran con ardor a demostrar el postulado en referencia y el cual no aparecía muy evidente después de esto.

En cuanto a los principios veamos en ligeras observaciones el contenido de cada uno de ellos.

De las tres Peticiones las dos primeras aclaran y extienden la definición de la línea recta; la primera que equivale a decir que dos puntos determinan una recta implica la constancia de curvatura de dicha línea, mientras la segunda postula la longitud infinita de ella, condición indispensable para establecer la proposición XII (o postulado VI). A lo menos así debió entenderlo Euclides sin reparar que puede conservarse la Petición 3 independiente de la proposición XII. En efecto, una recta puede prolongarse indefinidamente sobre sí misma sin tener una longitud infinita, conduciéndose así como lo hace una circunferencia que se recorriera en un sentido sin encontrarle un fin.

La tercera Petición establece una de las cualidades del plano, y que es la de extenderse indefinidamente en todo sentido. Wallis (geómetra inglés del siglo XVII) creyó encontrar en este principio la postulación de la semejanza de los círculos, interpretación correcta para una porción limitada del plano. En lo que Wallis erró fue en extensión de este concepto creyendo que era posible concebir un triángulo semejante a otro dado de magnitud arbitraria, hipótesis no más evidente que la proposición XI que pensó demostrar. Es fácil explicarse el errado camino de Wallis si se considera que la intuición apoya el lema en que se basó en el campo de nuestras reacciones sensoriales.

En cuanto a las Nociones Comunes —por lo menos las siete primeras— tienen un carácter completamente diferente. Ellas establecen relaciones entre cantidades e imponen condiciones. Estas siete proposiciones son por otra parte generales y aplicables a cualquier especie de magnitud (aritmética o geométrica). Estas proposiciones de una clara evidencia en el campo aritmético no se imponen en la misma forma a nuestro espíritu en el campo geométrico. En efecto cualesquiera de ellas que se considere son verdaderas bajo ciertas condiciones que afectan al plano en que se mueven las figuras. Para que ellas sean verdaderas es necesario postular previamente que las figuras se mueven sin deformación, que el plano es isótropo, continuo y homogéneo y otras condiciones que afectan a la naturaleza de los elementos que se consideren en el plano.

La proposición VIII no es sino la defini-

[8]Esto no significa que creamos que no sea la experiencia la fuente donde se nutre el espíritu.

[9]Para un análisis más profundo y detallado de esta materia recomendamos consultar la excelente obra de C. de Freycinet "De L'experiénce en géométric".

[10]Definición 34 en el texto del Dr. Simson.

ción de igualdad geométrica que justifica el método por superposición. En el fondo esta proposición implica postular tácitamente el movimiento de las figuras sin deformación, ya que no de otra manera puede afirmarse la igualdad de magnitudes que coincidan por superposición. Implica pues esta proposición un postulado más bien mecánico, porque necesita introducir el concepto de movimiento. Analizando más a fondo esta proposición se ve que también incluye otros postulados no menos importantes que el que acabamos de señalar. Ellos son los que establecen las condiciones que debe cumplir el plano y que hemos indicado anteriormente. Sin embargo podemos decir que la afirmación, o más bien dicho la definición de igualdad por superposición, es posible aun con deformación, bajo ciertas condiciones especiales de traslación. Podría darse una función adecuada de deformación, bajo la cual esta situación se hiciera posible permaneciendo válida la proposición euclidiana.

La proposición IX es la definición de la desigualdad en general. En cuanto a la proposición X ya hemos dicho que si en apariencia parece superflua en el fondo es de una profunda sutileza, pues ella define exactamente un grupo de condiciones que ha de cumplir el plano. Algunos autores como Legendre, la eliminan como proposición fundamental, prefiriendo deducirla como teorema, como consecuencia directa de la definición de la línea recta.

En cuanto a las proposiciones XI y XII ellas constituyen el objeto del presente trabajo. Su historia, es la historia de las geometrías no euclidianas. De sus significados y discusión nacieron nuevas disciplinas. La primera de ellas dio origen a la geometría de Lobatchefsky-Bolyai y la segunda a la geometría de Riemann.

Es oportuno adelantar que la proposición XI admite en geometría euclidiana otro enunciado bajo el cual se le conoce impropiamente como postulado de Euclides en los textos corrientes de estudio: *Por un punto situado fuera de una recta sólo puede trazarse una sola paralela a ella;* y que ha recibido el nombre de *postulado de las paralelas*. La equivalencia entre esta proposición y la clásica sólo existe en la geometría ordinaria, mas no así en geometría general o en la geometría de Riemann, como lo veremos más adelante, en que este postulado es falso mientras la proposición XI permanece válida.

A continuación de las Nociones Comunes, Euclides empieza el desarrollo de sus teoremas y demuestra tal sagacidad en la elección de ellas que hace suponer que este ilustre geómetra tuvo una clara visión de los profundos problemas que entrañaba la teoría del paralelismo. Sus primeras 28 proposiciones están demostradas prescindiendo del postulado V y ellas son válidas en la geometría general[11], o sea, en el sistema geométrico que depende de todas las proposiciones de Euclides con excepción de las proposiciones XI y XII. No hay duda que Euclides eludió mientras pudo la aplicación de la proposición XI, no pudiendo prescindir ya de ella en su teorema 29. "Si dos rectas paralelas son cortadas por una tercera, ellas hacen con éstas: 1º ángulos alternos internos iguales; 2º ángulos correspondientes iguales, y 3º ángulos internos de un mismo lado de la transversal suplementarios", teoremas para cuya demostración necesita de la proposición del paralelismo[12].

De los Elementos al Euclides ab omni naevo vindicatus

El espíritu esencialmente crítico y especulativo del griego debía necesariamente orientarlo hacia un análisis profundo de los principios que constituían la más bella y completa de las ciencias que poseían: la geometría. Hacia las proposiciones fundamentales que tan sagazmente había expuesto Euclides en sus Elementos, se orientó pues la preocupación de los comentadores de esta obra. Ya hemos visto cuales fueron entre otras, las razones que tuvieron para detenerse en la proposición XI que estaba ligada estrechamente a la definición de rectas paralelas que los llevó

---

[11] A estas 28 proposiciones podría agregarse el teorema de Legendre: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo no puede sobrepasar a dos ángulos rectos".

[12] Boccardini, en su prefacio a la versión italiana de la obra del padre Saccheri (que analizamos más adelante), dice: "Il testo stesso del postulato e il posto che Euclide gli ha dato ne'suoi elementi, provano sufficientemente che gli ha riflettuto sui primi principii della geometria e che ha viste le difficolta che nascondono nella teoria delle parallele; e non e impossibile che il geometra greco abbia essaminato per un istante l'ipotesi contraria secondo cui le due rette enunciate non si incontrano necessariamente, e chi egli stesso l'abbia rigettata a bella posta, a causa della complicazione apparente a cui avrebe dato luogo . . ." (pág. x del Euclides Emendato).

a presentir la existencia de rectas asintóticas por analogía con las asíntotas de la hipérbola y de la concoide. La paradoja que hemos señalado anteriormente, según la cual dos rectas coplanarias convergentes no se cortaban, para lo cual empleaban razonamientos sofísticos análogos a los de Zenón de Elea, contribuyó por su parte eficazmente a que se discutieran los fundamentos de esta ciencia y en especial la proposición XI con la que tenía conexión estrecha. Por último la forma gramatical misma del enunciado de este postulado, un poco compleja para dejar ver con claridad su evidencia, hizo que desde los primeros comentadores de la obra del geómetra griego se tratara de eliminar como principio pasándola a calidad de teorema y los esfuerzos de los matemáticos tendieron entonces a demostrarla.

Así empieza la historia de este axioma XI o postulado V cuya trayectoria milenaria marca una de las rutas más apasionantes de la Geometría.

Primero los griegos, en seguida los árabes para seguir más tarde los geómetras del Renacimiento, el postulado V sufrió el análisis sutil de más de veinte siglos de investigaciones continuadas.

Veamos mientras tanto las investigaciones realizadas por los matemáticos griegos de los tres últimos siglos de la era pagana y sigamos estas elucubraciones durante los primeros 15 siglos de nuestra era comenzando por los árabes, depositarios de la cultura helénica, hasta llegar a los matemáticos de las escuelas del Renacimiento; período este que redondea los dieciocho siglos y durante el cual aún se cree encontrar una demostración.

He aquí nuevamente el enunciado de la clásica proposición: "Si dos rectas son cortadas por una tercera, que forma con ellas dos ángulos interiores de un mismo lado (de la transversal), cuya suma es menor que dos ángulos rectos, estas dos rectas, prolongadas indefinidamente, concluirán por cortarse del lado en que ellas forman los dos ángulos que en conjunto valen menos de dos ángulos rectos".

Ingenuamente creyeron los primeros comentadores que cambiando la forma gramática! aparecería su evidencia oculta bajo su enunciado un poco engorroso. Fracasada esta tentativa y comprendiendo que el problema era más profundo buscaron ansiosamente otro principio por el cual sustituirlo, creyendo que en esa forma se solucionaba el problema.

En su "Comentario a Euclides", Proclo da a conocer las tentativas de Posidonio quien pretendió demostrarlo proponiendo se llamasen paralelas a dos rectas coplanarias equidistantes. El mismo Proclo da a conocer el pensamiento de Gemino quien hace ver que la definición euclídea y la propuesta por Posidonio llevan a resultados diferentes, puesto que la primera es completamente independiente de este concepto y presiente la posible existencia de rectas asintóticas. Después de analizar las investigadores anteriores[13] Proclo cree poder demostrarlo recurriendo a otra proposición que le parece más evidente: "La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan aumenta más allá de todo límite prolongando suficientemente las rectas", principio con el cual demuestran que si una recta encuentra una de dos paralelas, encuentra también la otra. Sin embargo Proclo no hace un avance mucho más grande que los geómetras que le habían precedido, pues además de no lograr otra cosa que la sustitución de un principio por otro, admite como principio que la distancia entre dos paralelas es finita, hipótesis de la cual deduce la proposición euclidiana[14].

Ninguno de los geómetras griegos, ni ninguno de los investigadores posteriores lograron demostrar valiéndose únicamente de las definiciones, postulados y axiomas clásicos sin recurrir a otras hipótesis la proposición XI.

Todavía cabe citar a Aganis, matemático que algunos confunden con Gemino y que pretendió también demostrarlo valiéndose del concepto de equidistancia. En todas estas demostraciones se obtiene que la distancia mínima entre dos rectas paralelas es una perpendicular común a ellas.

De los griegos el postulado pasó a los árabes, herederos de la cultura helénica. Entre estos investigadores merecen mención

[13]También Ptolomeo se preocupa del problema del postulado, proponiendo una demostración un poco simplista.

[14]Esta proposición que Proclo utiliza como lema fundamental está apoyada en la autoridad de Aristóteles.

Gerolamo Saccheri, geómetra italiano del siglo XVIII, que es el primero en vislumbrar la verdadera situación del problema que entraña la teoría del paralelismo, conoció y criticó la demostración de Proclo.

especial Al Nirizi (siglo IX) y Nasir-Eddin (siglo XIII). El primero en sus Comentarios a la obra de Euclides da a conocer y acepta la demostración de Aganis; el segundo parte de una proposición que le parece evidente y de la cual deduce el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo, teorema del que resulta directamente el postulado. La demostración del geómetra árabe ofrece la particularidad importante de colocar el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo como previo al postulado, método que más tarde emplean Saccheri, Lambert, Legendre y otros. En sus demostraciones Nasir-Eddin hace uso implícito del postulado de Arquimedes.

No encontramos en los siglos siguientes ningún trabajo importante. Estos empiezan nuevamente a fines del siglo XV con los geómetras italianos del Renacimiento. En esta época se hacen numerosas traducciones de los Elementos, de las obras de Proclo y de los matemáticos árabes. Algunos como Clavio, Cataldi y Giordano Vitale vuelven al concepto de equidistancia (el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es una recta).

Bonola en su estudio crítico sobre G. Vitale hace notar que la conclusión más importante obtenidas en esa época es la siguiente:

Sea ABCD un cuadrilátero con sus ángulos en A y B rectos y HK una perpendicular bajada desde un punto cualquiera de DC a AB. Vitale demuestra que siendo HK

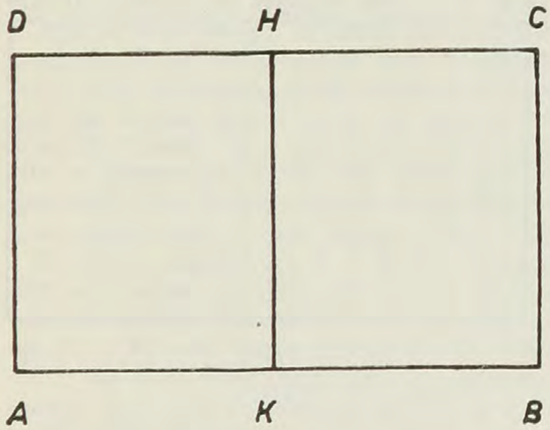

Figura 1

perpendicular común se tiene que los ángulos en C y D son iguales y que si HK es igual a AD, estos ángulos son rectos y CD equidistante de AB.

En Saccheri y Lambert encontraremos más tarde consideraciones análogas. El cuadrilátero birectángulo pasa así a ser una figura clásica en las tentativas por demostrar el postulado euclídeo.

En 1651 y 1653 J. Wallis (1616-1703) dictó en la Universidad de Oxford algunas conferencias sobre las tentativas de demostración y en ellas discute y analiza la dada por Nasir-Eddin. Después de hacer notar el fracaso de las tentativas que hasta entonces explotaron sin ningún resultado el concepto de equidistancia, Wallis propone una nueva demostración basado en el siguiente lema que considera evidente: Existe una figura de magnitud arbitraria semejante a otra figura dada.

Este principio de semejanza, según este matemático inglés, se encuentra contenido en los Elementos al enunciar Euclides su Petición tercera: Se pide poder construir un círculo con un punto cualquiera como centro y con una distancia cualquiera como radio, que no sería en el fondo otra cosa que la postulación de la semejanza para los círculos.

Sin embargo la hipótesis de Wallis no tiene más evidencia que la euclídea. En efecto no podemos postular la semejanza de figuras determinadas de extensión cualquiera, aun cuando para el plano reducido de nuestras experiencias adquiere este principio una gran fuerza de evidencia. De esto resulta que la tal hipótesis estaría a la misma altura de la tan discutida proposición XI. La original e interesante idea de Wallis, deja a pesar de todo, el problema en las mismas condiciones anteriores. Las proposiciones euclidianas, son —es preciso recalcarlo— evidentes para una porción reducida del plano y pierden este carácter cuando aquel se extiende en dimensiones arbitrarias. El sistema euclidiano es un todo coherente como sistema lógico; pero no tiene el carácter de absoluto, en el sentido que elimine todo otro sistema posible. En otras palabras puede existir un espacio que contenga el sistema ordinario como un caso particular en una porción reducida de él. Para comprender mejor esto, imaginemos una esfera de un gran radio, suficiente para que en una pequeña longitud, el arco se confunda con la cuerda aproximadamente. En tal plano, si consideramos un espacio muy reducido serían válidas todas las proposiciones euclidianas, no existiendo esta válidez para una geometría de la esfera en la totalidad de su extensión.

Saccheri que conoció y criticó la obra del matemático inglés hace notar que basta admitir la existencia de dos triángulos con ángulos iguales y lados desiguales para deducir la hipótesis euclídea.

Con Wallis termina el primer período de la historia del postulado V. Todos los investigadores hasta esta época creen en su demostración y recurren para ello a otras proposiciones que les parecen más evidentes y de las cuales resulta directamente. Las nociones de equidistancia primero y la de semejanza después, presentan un bello espejismo a los geómetras de los dieciocho siglos que siguieron a Euclides. Con Wallis termina la serie de los que creyeron en la demostración de este principio, porque si bien Saccheri debía publicar años más tarde su famoso "Euclides ab omni naevo vindicatus", en que pretende demostrar por fin el famoso postulado, su obra revela que el tal propósito no sólo no lo consiguió sino que sus investigaciones dejaron el convencimiento íntimo al autor que tal demostración era imposible y que podían existir otros sistemas geométricos independientes de la proposición XI.

Las investigaciones de Gerolamo Saccheri

En 1889 Eugenio Beltrami publicó un célebre artículo: "Un precursor de Legendre y Lobatchefsky" y en el cual habla de las investigaciones realizadas por un matemático italiano, Gerolamo Saccheri, del siglo XVIII, que puede considerarse como el verdadero iniciador de un nuevo sistema de geometría constituido independientemente del axioma XI de Euclides[15].

"Se ignora, dice Beltrami, la fecha de su nacimiento (Bonola da el año 1667 como fecha de nacimiento), se sabe sí que murió el 5 de octubre de 1733 en Milán, como rector del colegio de Brera. En 1697 es profesor en Pavia. El mismo año de su muerte publicó su célebre obra "Euclides ab omni naevo vindicatus sive-conatus geometricus — quo stabiliuntur — prima ipsa universae Geometriae Principia.

Esta obra fue traducida en 1894 al inglés por George Bruce Halsted; al alemán por F. Engel y P. Stäckel, y al italiano por Boccardini en 1904.

Saccheri conoció las tentativas realizadas por Ptolomeo Proclo, Nasir-Eddin, Borelli, Olavio y Wallis y es probable que también la de algunos otros. Estas demostraciones las expone y critica en su obra.

El "Euclides ab omni naevo vindicatus" está dividido en 2 libros y cada uno en dos partes. El autor empieza manifestando en su prefacio, la admiración muy profunda que le inspira Euclides y declara que conoce las investigaciones anteriores realizadas por otros geómetras y que en atención a los fracasos que ellos tuvieron sigue un nuevo camino. Este método consiste en hacer uso del razonamiento por reducción al absurdo. Eso sí que Saccheri no niega el postulado mismo, sino una de sus consecuencias, suponiendo que en un cuadrilátero la suma de sus ángulos interiores no sea 4 R, sino un valor menor o mayor.

Saccheri parte de un cuadrilátero birrectángulo isósceles en el cual los ángulos basales son rectos.

Las proposiciones I y II dicen:

"En el cuadrilátero ABCD en que AC y BC son iguales y los ángulos CAB y DBA iguales se verifica: 1º que los ángulos ACD y BDC son iguales, y 2º que si se traza la recta MH que une los puntos medios de AB y CD, esta recta es perpendicular a AB y CD".

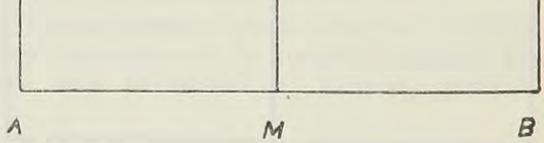

Figura 2

Estas proposiciones las demuestra el autor apoyándose en las proposiciones 4 y 8 (pertenecientes a los 28 primeros teoremas) de Euclides, que dependen únicamente de la superposición.

La primera proposición importante es la III: En el cuadrilátero birrectángulo en Â

[15]Dos historias de las matemáticas hablaron de esta obra, dice Bonola, la de Montucla y la de J. C. Heilbronner, obra que luego fue olvidada.

Trataremos de exponer, en lo que sigue de nuestro trabajo, tan fielmente como nos sea posible el contenido de esta interesante obra, que marca en forma decisiva el comienzo de investigaciones que debían conducir a nuevas trayectorias en el campo de la geometría, obra que, por otra parte, fue conocida por muchos de los que más tarde debían dar a este problema una solución definitiva.

y B y cuyos lados AC y BD son iguales, CD será igual, menor o mayor que AB, según que el ángulo en C y en D sean rectos, obtusos o agudos, proposición de la cual se desprende una ya tratada por Clavio y Giordano Vitale, según la cual en el cuadrilátero anterior si AC y BD son iguales al lado mayor se encuentra adyacente el menor ángulo.

Para demostrar la proposición III, Saccheri hace uso de la hipótesis de la longitud infinita de la recta y apoya su demostración en la proposición XVI de Euclides basada en el postulado VI o axioma XII.

He aquí la demostración de Saccheri:

Sea primero el ángulo en C y en D rectos. Supongamos que CD sea mayor que

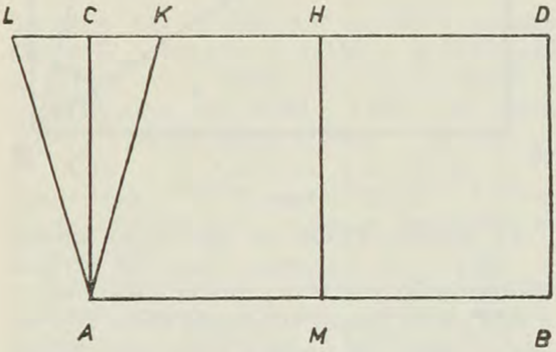

Figura 3

AB. En tal caso AB podríamos copiarlo a partir de D. Sea KD $=$ AB y unamos K con A. Tendríamos que el cuadrilátero ABDK tendría los ángulos en B y D rectos y AB $=$ KD; luego, $\measuredangle$ BAK $=$ $\measuredangle$ DKA pero siendo $\measuredangle$ BAK menor que el ángulo recto BAC el ángulo DKA también tendrá que ser menor que 1 recto, lo que es un absurdo, puesto que siendo $\measuredangle$ DKA exterior es mayor que el interior DCA (Euclides 1,16). En forma análoga se demuestra si se supone CD $<$ AB; luego, AB $=$ CD.

2º Si los ángulos en C y D son obtusos CD será menor que AB. En efecto, si unimos los puntos medios M y H los ángulos en M y H son rectos (proposición anterior). Es fácil demostrar que CH debe ser menor que AM, puesto que si CH $=$ AM los ángulos en C y H serían iguales; pero $\measuredangle$ KHM es recto y $\measuredangle$ ACH obtuso por hipótesis, lo que demuestra que CH no es igual a AM. Si CH es mayor que AM podemos proceder como en el primer caso.

3º En forma análoga se puede demostrar que si los ángulos en C y D son agudos, CD debe ser mayor que AB. Basta suponer que CD $=$ AB y después que CD es menor que AB (Se aplica entonces AB sobre CD y obtenemos DL). Se llega así a que CD es mayor que AB.

De acuerdo con la proposición tercera, Saccheri distingue tres hipótesis que llama, respectivamente: hipótesis del ángulo recto, hipótesis del ángulo agudo e hipótesis del ángulo obtuso, según que los ángulos en C y D sean rectos, agudos u obtusos.

A continuación enuncia los teoremas siguientes: "Si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo recto, o la hipótesis del ángulo obtuso, o la hipótesis del ángulo agudo, ella es verdadera en todos los demás casos" (Proposición V y VI). Estos teoremas el autor los demostró haciendo uso del postulado de Arquímides y de la hipótesis de la continuidad de la recta. Dehn y Bonola han demostrado que el principio de Arquímides no es necesario. Aun cuando hubiera sido nuestro deseo exponer en detalle estas sencillas y elegantes demostraciones, ello nos apartaría de la finalidad del presente trabajo.

Apoyándose en la proposición octava que le sirve de lema, Saccheri llega al siguiente teorema.

"En todo triángulo rectángulo la suma de los ángulos interiores es igual, mayor o menor que 1 recto, según que se verifique la hipótesis del ángulo recto, la del ángulo obtuso o la del ángulo agudo".

De esta proposición resulta inmediatamente un teorema característico de las geometrías no euclidianas y que extiende la proposición anterior a un triángulo cualquiera.

"La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que dos rectos, en el caso que se verifique la hipótesis del ángulo agudo y mayor o igual a dos rectos, en el caso que se verifique la hipótesis del ángulo obtuso o la del ángulo recto".

En efecto, sea ABCD un cuadrilátero birrectángulo isósceles (cuyos ángulos en A y B son rectos) y en que AD $=$ BC.

Es fácil demostrar que, según se verifique la hipótesis del ángulo recto, obtuso o agudo, se tiene:

$\measuredangle$ DAC $\gtreqless$ $\measuredangle$ ACB (Prop. VIII de Saccheri.

luego: $\measuredangle \text{CAB} + \measuredangle \text{ABC} + \measuredangle \text{BCA} \gtreqless 2\text{ R}$

Este teorema demostrado para un triángulo rectángulo es fácil extenderlo a un triángulo cualquiera dividiendo el triángu-

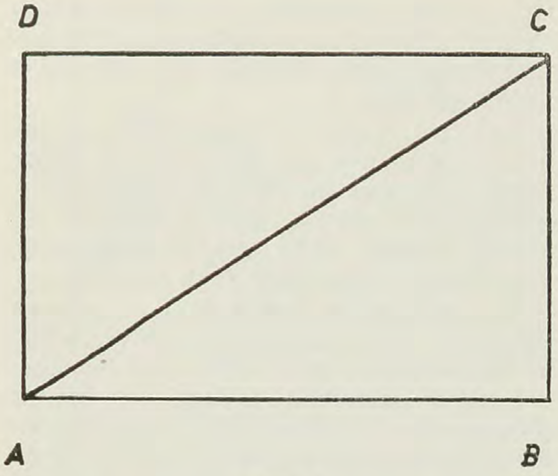

Figura 4

lo en dos triángulos rectángulos mediante la altura.

En realidad Saccheri no enuncia esta proposición en la forma como la hemos dado, sino que da su enunciado recíproco. "De la existencia de un triángulo en que la suma de los ángulos sea igual, mayor o menor que dos rectos se deduce la hipótesis del ángulo recto, obtuso o agudo" (Prop. XV).

Los resultados anteriores llevan al autor a demostrar que en la hipótesis del ángulo recto y en la del ángulo obtuso una perpendicular y una oblicua a una misma recta se encuentran (Prop. XI y XII).

De estas proposiciones resulta como consecuencia directa el V postulado de Euclides (Prop. XIII).

La conclusión lógica es entonces inmediata: "La hipótesis del ángulo obtuso es falsa porque se destruye a sí misma" (puesto que si en esta hipótesis se verifica el postulado euclídeo, la suma de los ángulos de un cuadrilátero sería 4 rectos y en consecuencia la hipótesis de que esta suma sea mayor que 4 rectos sería falsa) [16].

Pero cuando quiere demostrar la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo el autor fracasa completamente. Su proposición XVII dice: "En la hipótesis del ángulo agudo se puede encontrar una perpendicular y una oblicua a una misma recta que no se encuentran", cuya demostración reproducimos a continuación:

Sea AHMB un cuadrilátero rectángulo en A, B y H, y unamos B con H.

Sea el ángulo BMH agudo y BD la perpendicular a HM (en la hipótesis del ángulo agudo).

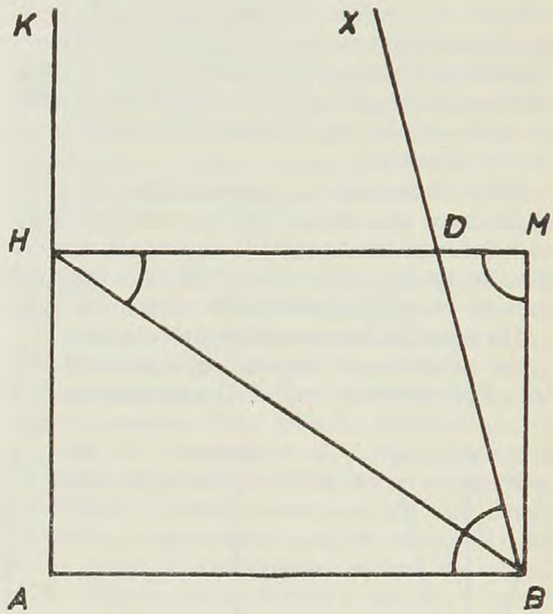

Figura 5

El ángulo BHM es agudo lo mismo $\measuredangle$ BMH por hipótesis; luego la perpendicular BDX de B a la recta HM cortará a HM en un punto D situado entre H y M; por lo tanto, el ángulo XBA será agudo. De esto resulta que AHK y BDX no se encuentran por ser perpendiculares a HM en H y en D y no pueden por lo tanto formar triángulo en virtud de la proposición 17 de Euclides[17].

A continuación de este teorema, en calidad de observación dice: "La hipótesis del ángulo agudo quedaría destruida si la proposición XVII fuera falsa".

En seguida, el autor expone y analiza las tentativas de Proclo, Borelli, Nasir-Eddin y Wallis. Esta disgresión que lo aparta un poco de su estricta línea de demostración lógica parece hecha más bien como un medio de convencerse a sí mismo que su camino está bien trazado, y a reforzar su pensamiento en cuanto a la validez del postulado euclídeo.

De estos análisis tal vez el más interesante es el que se refiere a las investigaciones de Wallis. Saccheri hace notar que basta admitir la existencia de dos triángulos de lados desiguales y ángulos iguales,

[16]La esencia de la demostración reposa en la hipótesis de la longitud infinita de la recta.

[17]La proposición 17 dice: En todo triángulo la suma de dos ángulos interiores es menor que dos rectos. Esta proposición como todas las primeras 28 del libro I están demostradas independientemente del postulado V.

para deducir la hipótesis del ángulo recto y demostrar en consecuencia el postulado en cuestión.

Sean en efecto, dice Saccheri, dos triángulos ABC y DEF de ángulos iguales. Si

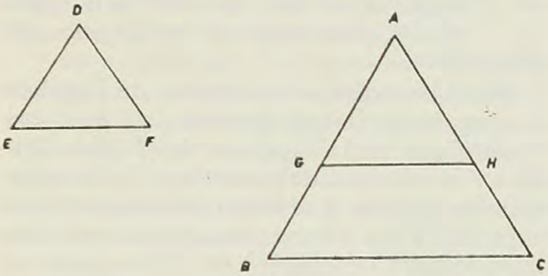

Figura 6

hacemos AG = DE, AH = DF y unimos G con H, se tendrá ∡ AGH = ∡ DEF y el ∡ AHG = ∡ DFE; pero el ∡ AGH y ∡ AHG dan con BGH y CHG una suma igual a 4 rectos, luego ∡ ABC + ∡ ACB + ∡ BGH + ∡ CHG = 4 R, luego en el cuadrilátero BGHC se verificará la hipótesis del ángulo recto, o sea, es verdadero el V postulado.

A partir de estos resultados, el geómetra italiano ensaya diversos caminos que lo conduzcan a demostrar la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo; pero fracasa en su intento. Uno de los resultados más importantes a que llega es: "Dos rectas situadas en el mismo plano o tienen una perpendicular común o se encuentran a una distancia finita, o se acercan una a otra".

Esto lleva a Saccheri a clasificar las rectas que pasan por un punto con respecto a una recta que se encuentra en el mismo plano en dos haces:

1º Rectas secantes a la recta dada, y

2º Rectas no secantes a ella y que admiten con la recta una perpendicular común.

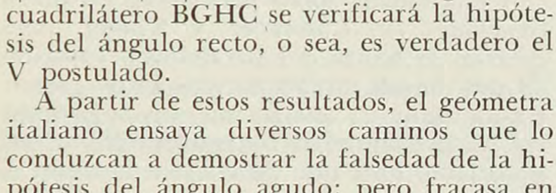

Figura 7

Ambos haces tienden como límite a dos rectas que separan el campo de las secantes y de las no secantes y que tampoco encuentran a la recta. Dichas rectas recibirían el nombre de paralelas a la recta dada y no admiten con la recta dada perpendicular común, es decir, se comportan asintóticamente[18].

Comprendiendo el autor su fracaso, trata de justificar el clásico postulado diciendo: "La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa porque ella repugna a la naturaleza de la línea recta". Las razones que expone el autor no tienen nada de riguroso, porque ellas se apoyan en un falso concepto que tiene de lo infinito.

Finalmente y viendo ya perdidas las esperanzas de demostrarlo, recurre al explotado concepto de equidistancia, camino en el que no logra mayor éxito.

En realidad, Saccheri comprendió claramente que la hipótesis del ángulo agudo daba lugar a un sistema geométrico diferente del ordinario y cuya existencia lógica quedaba demostrada a través de sus propias investigaciones. En otras palabras, su camino lo había conducido a demostrar lo contrario de lo que perseguía, es decir, demostró la indemostrabilidad de la clásica proposición griega.

En efecto, no de otra manera deben interpretarse sus propias palabras con que termina el libro I.

"Acerca de la hipótesis del ángulo obtuso, la cosa es más clara que el día; porque tomada como verdadera, se demuestra la absoluta y universal verdad del controvertido postulado de Euclides; como consta por las proposiciones 13 y 14 de este libro. No voy a probar la falsedad de la segunda hipótesis, que es la del ángulo agudo, sin demostrar antes que la línea cuyos puntos son equidistantes de una recta que se encuentra en el mismo plano es también una recta; *lo cual, sin embargo, no creo demostrarlo por el fondo de la misma hipótesis, como sería necesario para una perfecta refutación*".

En resumen, Saccheri logró demostrar fácilmente la falsedad de la hipótesis del ángulo obtuso, porque el aceptarla significaba negar el postulado VI o proposición XII de las Nociones Comunes y llegar a la concepción de línea recta cerrada (permaneciendo válido sin embargo el postulado V), conclusiones éstas que demuestran ampliamente la falsedad de dicha hipótesis. En cambio, en la hipótesis del ángulo agudo la situación es muy diferente; aquí se

[18]Este resultado justifica el presentimiento de los griegos hacia la posible existencia de rectas asintóticas y nos hace comprender la clara visión que ellos tenían de la ciencia del espacio.

mantenía el concepto de línea abierta e infinita y permanecían válidas todas las proposiciones, excepto el postulado V. Así lo comprendió Saccheri y a no mediar la época en que vivió habría sido el verdadero fundador de las nuevas geometrías, de las cuales como dice Mansion, tenía los elementos[19].

Investigaciones posteriores

Aun cuando el "Euclides ab omni naevo vindicatus..." no fue muy conocido de los matemáticos en general, ejerció, sin embargo, una decisiva influencia en algunos geómetras posteriores. En el siglo XVIII el suizo Juan Enrique Lambert (1728-1777), que al menos se sabe con seguridad conoció la obra de Saccheri a través de los trabajos de Klugel, desarrolla investigaciones análogas a las del geómetra italiano.

Lambert parte no ya del cuadrilátero birrectángulo isósceles, sino del cuadrilátero trirrectángulo y distingue también las tres hipótesis (del ángulo recto, del ángulo obtuso y del ángulo agudo), llegando como Saccheri a establecer la falsedad de la hipótesis del ángulo obtuso y fracasando también al querer demostrar la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo. Lambert avanza un poco más, estableciendo la proporcionalidad del área de un polígono y su deficiencia, o sea, la diferencia entre (n — 2) 2R y la suma de los ángulos del polígono[20].

El resultado más importante de Lambert lo constituye indudablemente el descubrimiento que en la hipótesis del ángulo agudo existe una unidad absoluta de las magnitudes, noción que más tarde explota con éxito De Tilly. De este resultado cree Lambert deducir la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo.

Lambert es el primero en ensayar una representación de las geometrías del ángulo obtuso y agudo en el plano euclídeo. Hace ver que la primera puede compararse a la geometría de la esfera y la segunda a la que se verificaría en una esfera de radio imaginario.

A esta misma época pertenecen las investigaciones de Kaestener y Klugel, para quienes la teoría del paralelismo constituyó una honda preocupación. Estos geómetras, aunque en una forma muy vaga todavía, ya presienten la indemostrabilidad del postulado, idea que debe acentuarse en el futuro con D'Alembert y especialmente con Lagrange que estableció la independencia de la trigonometría esférica del postulado V[21].

Después de Lagrande, Laplace y Fourrier tratan de justificar el postulado volviendo el primero a la noción de semejanza aplicable a nuestro Universo y recurriendo el segundo a la noción de distancia entre dos puntos, como idea fundamental y básica.

Pero ninguno de ellos aborda el problema en forma tan completa como Legendre.

Este eminente matemático francés vuelve al igual que Saccheri a la suma de los ángulos de un triángulo como punto de partida de sus investigaciones. Demuestra dos teoremas especialmente importantes

[19] "Le livre du P. Saccheri est écrit avec une rigueur vraiment euclidienne, sauf dans les passages oú interviennent ses fausses idées sur l'infini et les infiniment petits. Si l'auteur avait étudié Archimède et Newton avec le même soin que les Éléments d'Euclide, il y aurait appris à manier avec précision et sûreté ces espressions conventionelles de la langue mathématique, et probablement il serait arrivé, un siècle avant Lobatschewsky et Bolyai, à cette conclusion: On peut édifier un système de géométrie parfaitement rigoureux, différent de celui d'Elclide. Peut-être même aurait-il découvert la géométrie riemanniene, puisque son live contient quelques propositions qui s'y rapportent, à côté de beaucoup d'autres qui appartiennent à la géométrie de Lobatschewsky.

Mais, malgré ses défauts, l'Euclides ab omni naevo vindicatus, est l'ouvrage le plus remarquable que l'on a it écrit sur les Éléments avant Lobatschewsky et Bolyai. Il est probable qu'il n'a pas été sans influence sur le développement de la science. Il ne'st pas resté inconnu; il a été l'objet d'un compte rendu (superficiel, il est vrai) en 1736, dans les Acta Eruditorum. Il se trauvait probablement á la bibliothèque de Göttingen vers 1800, car il est marqué d'un astérisque dans la Bibliotheca mathematica de Murhard; dans cet ouvrage il est signalé (t. II, p. 43) parmi les écrits consacrés à l'esplication, à la critique ou à la défense d'Euclide. Il o donc eu quelque notoriété, et l'on peut conjecturer qu'il n'a échappé ni à Gauss, ni aux autres géométres qui se sont occupés, dans la première moitié de ce siècle, des principes fondamentaux de la géométrie. Quoi qu'il en soit, le P. Saccheri est, chronologiquement, le premier qui ait écrit une vraie étude critique sur le postulatum, et il doit être regardé comme el précurseur des géométres non euclidiens modernes (Mansion. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. 1889-1890).

[20] Saccheri, en su proposición XXV, habla también de esta deficiencia; pero no logra establecer su relación con el área del polígono.

[21] Lagrange avait reconnu l'independence entre les formules de la Trigonométrie sphérique et l'axiome II, et il croyait pouvoir tirer de là une démonstration de cet axiome. Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme in suffisantos. C'ost ainsi qui'il s'exprimait dans ses conversations avec Boit. (Communiqué par M. Le fort). Nota de la pág. 84, de J. Hoüel, ob. cit.

que llevan su nombre, aun cuando ellos se encuentran en la obra de Saccheri; el primero no está enunciado explícitamente en el Euclides ab omni . . . pero se desprende como conclusión obligada, y el segundo dicho en forma más general que la dada por Legendre. Por esta razón este segundo teorema se llama de Saccheri-Legendre.

Primer teorema de Legendre. En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es menor o a lo sumo igual a dos rectos.

He aquí la demostración de Legendre:

Sea AA_1B un triángulo cuya base AA_1 se encuentra sobre la recta L y construyamos n triángulos iguales, tales que: $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = A_{n-1}A_n$ y cuyos vértices sean B; B_1; B_2; B_3 .... B_n y congruentes con AA_1B.

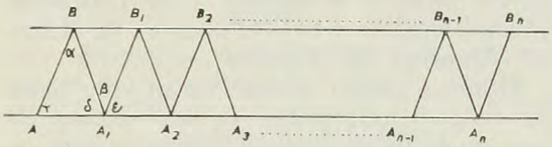

Figura 8

Sea α el ángulo en B y β el ángulo BA_1B_1. Es fácil demostrar que la suma de los ángulos del triángulo AA_1B no puede ser mayor que dos rectos. En efecto, supongamos que esta suma fuera mayor de dos rectos. De la construcción se tiene:

$$\beta = 180 - (\delta + \varepsilon)$$

pero siendo $\gamma = \varepsilon$ por ser todos los triángulos congruentes entre sí: $\beta = 180 - (\delta + \gamma)$; pero por hipótesis $\alpha > 180 - (\delta + \gamma)$, luego: $\alpha > \beta$.

Por lo tanto, en virtud del postulado I y proposición 24 de Euclides (dem. indepen. del postulado V):

$$AA_1 > BB_1$$

Sea $AA_1 - BB_1 = d$

Para los n triángulos tendremos:

$$nAA_1 - nBB_1 = nd$$

Por otra parte tenemos:

$$AB + BB_1 \,.\, n + B_nA_n > AA_1 \,.\, n$$

y siendo $AB + B_nA_n$

$$2AB > AA_1 \,.\, n - BB_1 \,.\, n$$
$$2AB > (AA_1 - BB_1) \,.\, n$$
$$2AB > nd$$

lo que sería un absurdo, pues para un valor n conveniente el producto nd se hace mayor que el trazo finito 2AB.

Segundo teorema de Legendre

El segundo teorema que dice: "Si en un solo caso la suma de los ángulos de un triángulo es menor o igual que dos rectos, será igual para todos los demás casos", se encuentra expuesto y demostrado en la obra de Saccheri al extender sus hipótesis del ángulo agudo y recto a cualquier otro caso, referentes a los cuadriláteros birrectángulos isósceles.

Establecidos estos teoremas, Legendre trata de demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos y da para este objeto varias demostraciones, en algunas de las cuales hace uso del postulado de Arquímides y en otras de la hipótesis de la medida relativa de los trazos, rechazando la posibilidad de que la suma de los ángulos de un triángulo sea menor que dos rectos, por cuanto ella lleva a la existencia de una unidad absoluta de medida.

Legendre ejerció una considerable influencia en su tiempo y contribuyó enormemente a reiniciar el interés por las investigaciones sobre la teoría de las paralelas. Fracasó como todos los otros en su afán de demostrar el clásico postulado; pero afianzó la idea que se abría paso lentamente en el sentido que no era posible llegar hacer la tal demostración.

Termina así la época en que aún se cree en la demostrabilidad del V postulado. Se inicia con los primeros decenios del siglo XIX una nueva era en la historia de la clásica proposición. Se empieza ahora por dudar ya acerca de la posibilidad de obtener una demostración, presunción que se acentúa en el futuro y nace la idea de que es posible la creación de un nuevo sistema geométrico independiente del axioma del paralelismo. Tal idea debía germinar y dar sus frutos entre el segundo y tercer decenio del pasado siglo. Tres hombres geniales se llevan la gloria de la creación de este nuevo edificio geométrico; ellos son Gauss en Alemania, Lobatchefsky en Rusia y Juan Bolyai en Hungría.

Pero antes de referirnos a estos matemáticos digamos algo de dos precursores de esta nueva disciplina: ellos son Federico Luis Wachter y Wolfgang Bolyai.

Wachter (1792-1817) pretendió como todos la demostración de la milenaria proposición recurriendo a la noción de círculo como anterior a la idea del paralelismo. Sin embargo, el mismo Wachter habla en 1816, poco antes de su muerte (en la correspondencia tenida con Gauss) de una geometría antieuclídea y llega a conclusiones que de continuar en ellas conducen a la geometría del ángulo agudo. Dice Wachter que esta nueva geometría se obtiene sobre una esfera cuando el radio de esta se hace mayor de un límite asignado.

En cuanto a Wolfgang Bolyai, nos referiremos en una forma más detallada, en atención a la importancia y relación que él tiene con las investigaciones de su hijo Juan.

Wolfgang Bolyai (1775-1856)

Nació el 9 de febrero de 1775 en Bolya (Transilvania), haciendo sus primeros estudios en Enyed y más tarde en Klausemburgo. Completó sus estudios en Alemania en la Universidad de Göttingen, donde hizo amistad con el eminente matemático Carlos Federico Gauss, amistad que perduró toda la vida.

Fue Wolfgang hombre de elevada inteligencia y recto corazón. De él dice Sartorius von Waltershausen: "Bolyai fue un espíritu excepcional". Gauss ha dicho de él, que era el único que tenía formado su concepto metafísico sobre los principios de las matemáticas. Sus cartas nos revelan un pensador profundo y un bello carácter; su expresión original recuerda a menudo el estilo de Juan Pablo. Confinado en un rincón apartado de la tierra, aislado de toda alma a la altura de la suya, vivió en los últimos años en medio del tumulto de una revolución devastadora, rodeado de los horrores de la guerra civil y reducido a una triste situación económica; pero dotado de una noble calma y de una conciencia pura, él da una mirada de esperanza a las rutas de la eternidad. . .".

Benzenberg, en carta dirigida a Gauss en 1801, le expresa su admiración por Bolyai, diciéndole que es uno de los hombres más extraordinario que ha conocido.

Después de la muerte de su viejo amigo Gauss (1855), el rey envió a Bolyai la gran medalla de plata y bronce que se acuñó a la memoria del ilustre matemático. Por su parte, sabios de Göttingen continuaron en correspondencia, manteniéndolo al corriente de todo progreso científico.

Wolfgang se preocupó, tal vez por consejo de Kaestner y de Seyffer, de la teoría del paralelismo e intentó como todos los geómetras precedentes, demostrar el axioma XI, logrando solamente sustituir unos principios por otros, lo que lo llevó a pensar en la indemostrabilidad de tal proposición. El fracaso de sus investigaciones lo desalentó, considerando que su vida entera estaba fracasada. Debía ser su hijo Juan el que viniera a completar su obra. Este joven y genial matemático desoyendo los consejos de su padre que lo instaba a que se apartara de este tema, logró constituir un cuerpo de doctrina independiente del axioma XI, investigaciones que publicaron de común acuerdo como Apéndice de una de las obras de Wolfgang (Del Tentamen juventutem. . .) y bajo el nombre de "Ciencia Absoluta del Espacio".

Hombre genial, simple en su vida hasta la exageración, pidió en su testamento que no le hicieran otro homenaje que tocarle la campana de su querido colegio de Maros Vasarhely, en donde dictó lecciones durante cuarenta y siete años.

El día de su muerte el Colegio publicó —bajo su carta de despedida que había escrito un año antes— las siguientes líneas: "La administración del Colegio Reformado anuncia la triste nueva que después de cuarenta y siete años de buenos e infatigables servicios y cinco años pasados en el descanso, el benemérito profesor, correspondiente de la Academia Húngara, Bolyai Farkas (Wolfgang) ha dejado de existir el 20 de noviembre de 1856 a las 9½ horas P. M., a la edad de 82 años. Los últimos honores le serán rendidos el 23 a las 2 P. M. Por respeto a la voluntad del difunto, la inhumación se hará de acuerdo con lo dispuesto más arriba (Se refiere al deseo de Bolyai de que sólo se le toque la campana del Colegio como símbolo de su partida hacia la gran lección).

Publicó varias obras didácticas y otras que contienen sus investigaciones, todas editadas por suscripción entre sus amigos. La principal de ellas es su famoso "Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva, evidentiaque huic propia introducendi. Cum Appendice triplici. "La ciencia absoluta del espacio", se publicó como apéndice al tomo I de esta obra.

Así termina un segundo período en la

historia de la geometría. Nace la idea clara de la indemostrabilidad del axioma XI[22]. Ya está preparado el ambiente a nuevas trayectorias de donde debían surgir las futuras doctrinas.

Si la definición euclídea de paralelas es independiente del postulado V, es posible edificar un sistema geométrico independiente de él y que conserve todos los demás principios y propiedades de la recta enunciados en los Elementos, sistema cuyo valor lógico está a la misma altura del clásico. A esta nueva geometría fue llevado Saccheri con su hipótesis del ángulo agudo, y a no mediar los prejuicios milenarios de la idea de una geometría absoluta, se habría adelantado en un siglo la creación de las geometrías no euclidianas.

Nacida ya la idea debía surgir necesariamente el nuevo sistema. Fue lo que hicieron Gauss, Lobatchefsky y Bolyai, al crear una geometría que correspondía exactamente a la hipótesis del ángulo agudo, y que ha llevado el nombre de estos dos últimos (o también hiperbólica).

La creación de este sistema nos presenta el caso más notable de investigación simultánea hecha separadamente y nos muestra al mismo tiempo cómo a veces una idea hace un silencioso camino subterráneo esperando que el ambiente sea propicio para surgir a la superficie.

GAUSS, LABOTCHEFSKY Y BOLYAI

Carlos Federico Gauss

Es tan vasta su obra que estaría fuera de la finalidad del presente trabajo el hablar de la totalidad de sus investigaciones. Todo lo que de él digamos tendrá, pues, relación directa con la teoría del paralelismo.

Lo que hizo Gauss sobre estas materias se sabe a través de la correspondencia que mantuvo con Taurinus, Schumacher y otros matemáticos de su tiempo y muy especialmente con W. Bolyai, el gran amigo de su juventud. El que Gauss no haya escrito sino esbozos fragmentados sobre la teoría de las paralelas, queda explicado por dos razones: 1º su genio matemático lo condujo primero que nadie a la verdadera solución del problema. Comprendió claramente que el V postulado era independiente de la definición euclídea de paralelas y no involucraba la naturaleza de la línea recta, por lo tanto, podía edificarse un nuevo edificio geométrico independiente de este principio. Tan audaz concepción debía traer consigo un enorme revuelo en el campo científico no excento de molestias para su autor. Entonces, más por temor a empañar su prestigio, que por modestia o discreción, no se atrevió a seguir sus propios pensamientos (temor al clamor de los beocios como decía él), actitud que se explica fácilmente; pero que no se justifica. Esta actitud temerosa fue en parte la causa de que este sabio mantuvo durante 35 años, más o menos, encerradas en su mente las nuevas ideas, y 2º porque cuando ya se había decidido a hacerlo tuvo conocimiento de las investigaciones análogas realizadas por Juan Bolyai.

En cuanto a la época en que Gauss inició sus investigaciones, orientándolas definitivamente[23] hacia la concepción de una nueva geometría, las cartas enviadas a Taurinus (8 de noviembre de 1824), a Bessel (27 de enero de 1829) y a Schumacher (17 de mayo de 1831) y (28 de noviembre de 1846), dicen Stäckel y Engel permiten fijar el año 1792 como el punto de iniciación de sus meditaciones, aun cuando su carta a W. Bolyai de 6 de marzo de 1832, da una fecha más reciente (1797). Sin embargo, el 16 de diciembre de 1799, en carta dirigida a W. Bolyai queda establecido claramente que en esta fecha ya Gauss tenía sus trabajos muy adelantados. En efecto, él dice:

"Helmstedt, 16 de diciembre de 1799.

"... Lamento sinceramente no haber aprovechado nuestra vecindad en ocasiones anteriores para conocer mejor tus trabajos sobre los principios de la geometría, me habría ahorrado ciertamente esfuerzos inútiles y habría tenido el espíritu más en reposo, tanto como mi carácter puede tenerlo, aun cuando falte mucho para ello en este tema. En cuanto a mí, mis trabajos están ya muy avanzados (tanto como me ha permitido hacerlo el poco tiempo que me dejan mis ocupaciones de naturaleza muy diferente); pero la vía en la que he

[22]Riemann creó, en 1854, otro sistema geométrico no euclidiano, que correspondía a la hipótesis del ángulo obtuso.

[23]Gauss, en su juventud, se preocupó, junto con W. Bolyai, de la teoría del paralelismo, probablemente a insinuación de Kaestner y Seyfrer, conocedores profundos de este problema. Es probable, también, que a través de ellos tuvieran conocimiento de las investigaciones de Saccheri y Lambert.

penetrado no conduce al fin que se persigue, y que afirmas haber alcanzado, sino que lleva más bien a poner en duda la exactitud de la geometría.

"He llegado, es verdad, a muchas cosas que serían, miradas por la mayor parte de los hombres como una demostración verdadera; pero que para mí no demuestran, por decirlo así, NADA, por ejemplo, si se pudiera demostrar la posible existencia de un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que toda área dada, estaría entonces en condiciones de demostrar con un rigor perfecto toda la geometría.

"La mayor parte, es verdad, le daría a esto el rango de axioma; pero yo no; podría suceder que por lejanos que estuviesen entre sí los vértices de un triángulo en el espacio, su área permaneciera siempre menor (infra) a un límite dado. Yo tengo algunos teoremas parecidos; pero no encuentro ninguno satisfactorio. Hazme conocer luego tu trabajo, habrás adquirido derecho a mi reconocimiento; pero no, es verdad, el del grueso público (al cual pertenecen sin embargo algunos mirados como hábiles matemáticos) ; me doy cuenta que cada día el número de verdaderos geómetras es extremadamente restringido, y que la mayoría no son capaces de aportar un juicio sobre las dificultades de trabajos como el tuyo, ni aun de comprenderlos . . .".

Gauss cita a continuación los trabajos de dos matemáticos de segunda importancia que creyeron establecer la teoría de las paralelas, trabajos que él encuentra malos.

El 20 de junio de 1831 W. Bolyai envió a Gauss la obra de su hijo, carta que no llegó a su destino. El 16 de enero del año siguiente envió por segunda vez el Apéndice. He aquí la respuesta de Gauss:

Gottingue, 6 de marzo de 1832.

"...Hablemos ahora un poco del trabajo de tu hijo.

Si empiezo diciendo que *no puedo elogiar este trabajo* quedarás ciertamente un instante maravillado; pero no puedo decir otra cosa, alabarlo sería alabarme a mí mismo; en efecto el contenido de toda la obra, el camino que ha trazado tu hijo, los resultados a los cuales ha llegado, coinciden casi enteramente con mis propias meditaciones que han ocupado en parte mi espíritu desde hace 35 años. Así me quedé completamente estupefacto. En cuanto a mi trabajo personal del cual, hasta ahora, he confiado muy poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras sobre las cuestiones de que se habla, y yo he encontrado muy pocas personas que prestasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. Para poder tener este interés se necesita ante todo haber sentido muy vivamente lo que esencialmente falta, y sobre esta materia casi todos están en una completa oscuridad. Al contrario, era mi idea escribir con el tiempo todo esto, para que al menos no pereciesen conmigo. Y así es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy muy contento que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable.

Encuentro las notaciones muy precisas y propias para ser breves; sin embargo me parece que sería bueno para algunas de las nociones principales, elegir no solamente símbolos o letras, sino una terminología determinada, y yo he ya pensado bastante tiempo en designaciones parecidas. Mientras uno se limita a reflexionar en los problemas valiéndose directamente de la intuición no hay necesidad de nombres ni símbolos; ellos no son necesarios sino cuando se quiere esclarecerlos a los otros hombres. Se podría por ejemplo dar a la superficie que tu hijo designa por F el nombre de *paraesfera;* a la línea L el nombre de *paraciclo;* éstas son en principio la superficie de la esfera y la circunferencia del círculo cuyo radio es infinito. Se podría llamar *hiperciclo* el conjunto de todos los puntos equidistantes de una recta situada en el plano de ellos; en la misma forma se podría hablar de *hiperesfera*. Pero todo esto no es sino una cuestión accesoria sin importancia. Lo principal es el fondo de la forma.

En algunas partes de estas investigaciones he seguido otra vía; como ejemplo adjunto una demostración puramente geométrica (bosquejada a grandes rasgos) de este teorema: que la cantidad en que la suma de los ángulos de un triángulo difiere de 180° es proporcional al área del triángulo.

I. El conjunto de tres rectas ab, ed, ef tales que ab || dc cd || ef, ef || ba forma una figura que llamaremos T. Se puede demostrar que esta figura está situada siempre en un plano.

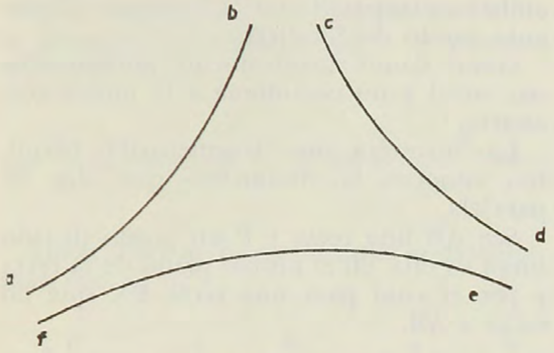

Figura 9

II. Esta parte del plano que está situada entre las tres rectas ab, cd, ef, tiene un área finita determinada, que designaremos por t.

III. Dos rectas ab, ac se cortan en a bajo un ángulo φ, se puede determinar una tercera recta de modo que se tenga ab || ed, ac || de, entonces de, está también situada en un plano con ab y ac y el área de la

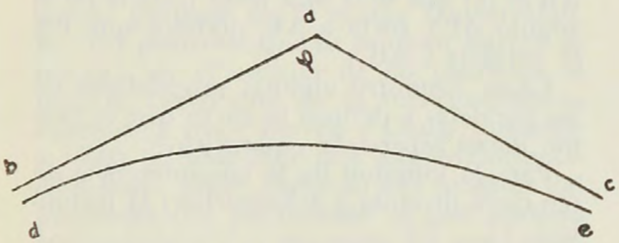

Figura 10

superficie comprendida entre estas rectas es finita y no depende sino de φ. Evidentemente en Σ[24] de y bac no forman sino una línea recta cuando $\varphi = 180^o$ y en consecuencia el valor de esta área desaparece al mismo tiempo que $180 - \varphi$. Se tendrá pues en general que el área es igual a F $(180^o - \varphi)$, siendo F un símbolo funcional.

IV. Teorema:

Se tiene siempre:

$$F(\varphi) + F(180^o - \varphi) = t$$

[24] Se refiere al sistema euclidiano. Bolyai llamó Σ al sistema ordinario y S al no euclidiano (Nota del autor).

La demostración está dada por la figura bac $= \varphi$ bad $= 180^o - \varphi$, ac || fe, ef || ab, ab || bg, ad || gh.

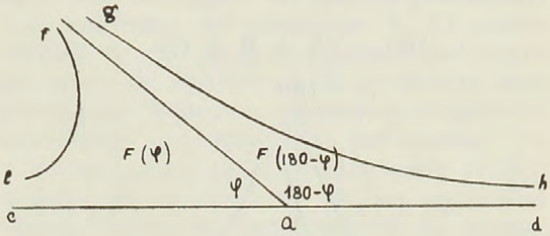

Figura 11

V. Teorema. Se tiene siempre:

$$F(\varphi) + F(x) + F(180 - \varphi - x) = t$$

La demostración se ve claramente de la figura 6 en que las áreas (1), (2), y (3) tienen por valor:

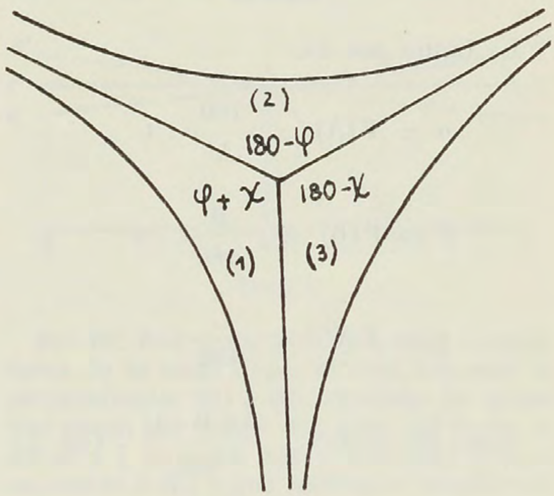

Figura 12

$$(1) = F(180 - \varphi - x)$$
$$(2) = F(\varphi)$$
$$(3) = F(x)$$

y su suma es t.

VI. Corolario.

Se tiene en consecuencia:

$$F(\varphi) + F(x) = t - F(180 - \varphi - x) = (\varphi + x)$$

de donde se deduce fácilmente

$$\frac{F(\varphi)}{\varphi} = \text{constante.}$$

y esta es: $\dfrac{t}{180}$

VII. Teorema.

El área de un triángulo cuyos ángulos son A, B y C es:

$$\frac{180 - (A + B + C)}{180} \cdot t$$

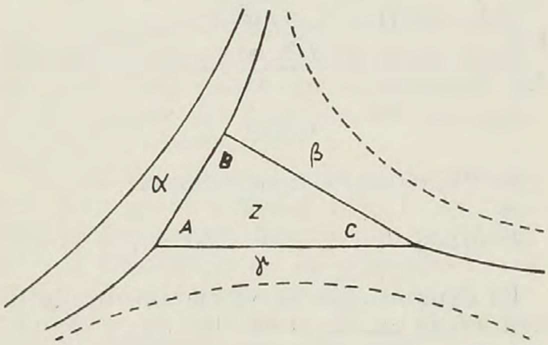

Figura 13

La figura nos da:

$$\alpha = F(A) = \frac{180}{A} \cdot t$$

$$\beta = F(B) = \frac{B}{180} \cdot t$$

$$\gamma = F(C) = \frac{C}{180} \cdot t$$

$$t = \alpha + \beta + \gamma + Z = \frac{A+B+C}{180} \cdot t + Z$$

He querido aquí simplemente bosquejar la demostración sin ningún trabajo de lima, y porque el tiempo me ha faltado hasta ahora para pulirlo. Tú eres libre de comunicarlo a tu hijo; yo te ruego en todo caso saludarlo cordialmente de mi parte y asegurarle mi alta estimación: proponle al mismo tiempo ocuparse del siguiente problema:

Determinar el volumen del tetraedro (espacio encerrado por cuatro planos)...

El 20 de abril de 1835, al enviar W. Bolyai los dos volúmenes de su Tentamen a su amigo Gauss, le manifiesta que su hijo había resuelto un año antes de la publicación de su Apéndice el problema que le proponía.

La geometría que había creado Gauss era idéntica a la creada por Juan Bolyai y ambas correspondían a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri.

Gauss llamó sucesivamente antieuclidiana, astral y no euclidiana a la nueva geometría.

Las investigaciones fragmentadas permiten conocer la definición que dio de paralela.

Sea AB una recta y P un punto situado fuera de ella, en el mismo plano de la recta y por el cual pasa una recta PX que no corta a AB.

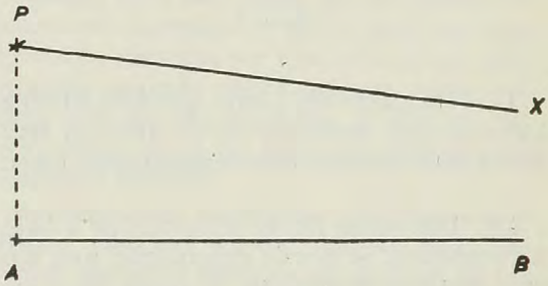

Figura 14

Si PX siendo coplanaria y no secante con AB es tal que toda otra recta trazada en el ángulo APX corta a AB, decimos que PX es paralela a AB.

Gauss demostró algunas propiedades de las paralelas y definió la curva que él mismo llamó hiperciclo y paraciclo[25].

Para la longitud de la circunferencia da (en carta dirigida a Schumacher) la fórmula:

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{\frac{-r}{k}} \right)$$

Simultáneamente con las investigaciones de Gauss son las de Schweikart y su sobrino Taurinus, el primero de los cuales esbozó un sistema de ideas destinadas a construir una geometría del ángulo agudo, mientras que el segundo logró mucho más, llegando a construir un sistema en que nos da a conocer las fórmulas de la nueva trigonometría que obtuvo partiendo de las de la trigonometría esférica ordinaria y sustituyendo el radio real r por el imaginario ir. A este sistema geométrico lo llamó geometría logarítmico-esférica y en ella la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.

[25] Esta curva es la que designaremos con el nombre de oriciclo.

Para demostrar esto bastaría partir de la fórmula fundamental de la trigonometría esférica:

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \operatorname{sen} \frac{a}{r} \operatorname{sen} \frac{b}{r} \cos \gamma$$

Haciendo r = ir las fórmulas se transforman en:

$$\cos h \frac{c}{r} = \cos h \frac{a}{r} \cos h \frac{b}{r} = \operatorname{sen} h \frac{a}{r} \operatorname{sen} h \frac{b}{r} \cos \gamma$$

Puede demostrarse que en tal caso se obtienen valores de α, β y γ, cuya suma es menor de dos rectos.

Nicolás Ivanovich Lobatchefsky (1793-1856)

Hijo de una viuda modesta de Nijni-Novgorod, estudió en la Universidad de Kazán bajo la dirección de Bartels, amigo y compatriota de Gauss. Alumno primero, y ayudante después, Lobatchefsky terminó siendo profesor de la misma Universidad. Es muy probable que su profesor Bartels lo iniciara en el estudio de las paralelas, si bien es cierto que de la correspondencia mantenida entre Bartels y Gauss (anterior a 1802) se desprende que ninguna orientación pudo haber obtenido este profesor del problema del paralelismo y que pudiera transmitírsela a su discípulo. Lo que Lobatchefsky sí ha conocido con toda probabilidad son las investigaciones de Saccheri y Lambert sobre estas materias, ya que en 1835 escribe:

"...el fracaso de las tentativas efectuadas desde Euclides y por espacio de dos milenios, despertó en mí la sospecha que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar y que para su confirmación pudiera servir la experiencia, como en el caso de las ciencias naturales..."

En 1815 Lobatchefsky cree en la posibilidad de una demostración como lo demuestra un manuscrito suyo encontrado, y en el cual existen algunas tentativas de demostración. Su propio fracaso acentuó en él la idea de que tal demostración era imposible y concibió la sospecha de la independencia de la proposición clásica del resto de los principios, orientándose hacia la idea de constituir una geometría independiente de ella.

En 1826 da lectura a su "Exposición suscinta de los principios de la geometría", memoria que demuestra que ha conseguido su objeto de fundar un sistema geométrico independiente del postulado V. El nuevo sistema es análogo a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri, a la geometría imaginaria de Taurinus (geometría logarítmico-esférica) y al concebido por Gauss.

Lobatchefsky publicó más tarde el desarrollo de su doctrina en las siguientes obras: "Sobre los fundamentos de la geometría" (1830), "Geometría Imaginaria" (1837), "Nuevos fundamentos de la geometría" (1838), "Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas" (1840) y "Pangeometría", en 1855, obra ésta en que hace una exposición completa de su sistema[26].

El punto de partida de Lobatchefsky es la negación del postulado euclídeo. He aquí la figura del geómetra ruso:

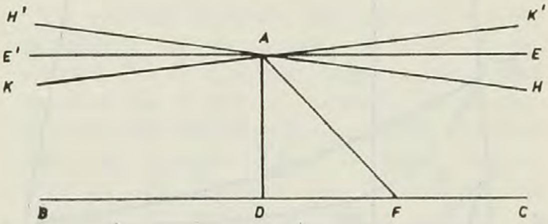

Figura 15

Sea BC una recta y A un punto situado fuera de la recta desde el cual bajamos la perpendicular AD a BC. De todas las rectas que pasan por A hay dos, una AH hacia la derecha y otra AK hacia la izquierda que no cortan a BC y que reciben el nombre de paralelas a BC. Las rectas comprendidas entre AE y AH y AK y AE', que tampoco cortan a la recta BC, reciben el nombre de no secantes. En tal situación las dos paralelas a la recta dada vienen a ser el límite hacia el cual tienden las no secantes y las secantes cuando las rectas del primer haz se aproximan a las rectas del segundo haz.

En seguida el autor estudia las propiedades de conservación, reciprocidad, transitividad y el carácter asintótico de las paralelas, demostraciones que el autor da tomando como base el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo que demuestra previamente.

[26] La Sociedad Físico-Matemática de Kazán creó, para honrar el nombre de este distinguido geómetra, el Premio Lobatchefsky dado a Sofhus Lie en 1897 y a Hulbert en 1904.

Lobatchefsky es llevado en sus investigaciones a las mismas curvas que ya hemos citado al referirnos a Gauss con el nombre de paraciclo e hiperciclo. Estas curvas pertenecen a dos superficies, la paraesfera (llamada orisfera por Lobatchefsky) y la hiperesfera, en la primera de las cuales el autor edifica sus construcciones de triángulos básicos para sus fórmulas trigonométricas.

He aquí cómo procede:

Sean tres planos que se cortan en líneas paralelas AA′, BB′ y CC′, sea ABC un triángulo rectilíneo rectángulo. Si estos

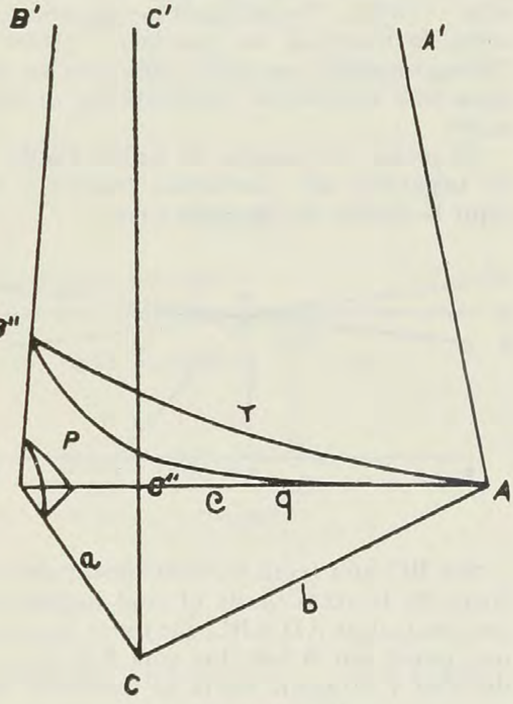

Figura 16

planos los cortamos por una orisfera obtendremos el triángulo orisférico AC″B″.

Partiendo de esta figura Lobatchefsky enuncia sus proposiciones y encuentra sus fórmulas trigonométricas basándose en los siguientes resultados:

1º A todo triángulo esférico rectángulo corresponden dos triángulos rectángulos rectilíneos, resultado que le permite establecer un grupo de fórmulas trigonométricas que son igualmente válidas para el triángulo rectilíneo rectángulo como para el triángulo esférico rectángulo, resultados que lo llevan a establecer la independencia de la trigonometría esférica del V postulado;

2º En la orisfera es válida la geometría euclidiana, y

3º Entre dos arcos de oriciclos coaxiales existe la relación: $s = s' \cdot e^x$

Lobatchefsky desarrolla en su Pangeometría la Analítica de su sistema, como también la determinación de áreas y volúmenes.

En 1856, estando ya ciego, después de una vida consagrada por entero al estudio, murió este eminente geómetra a los 63 años, rodeado del respeto y admiración de sus contemporáneos.

Juan Bolyai (1802-1860)

Nació en Klausenburgo (Transilvania) el 15 de diciembre de 1802. Hijo de Wolgang Bolyai, heredó de su padre el genio matemático. Hizo en el colegio de su país los primeros estudios, los cuales terminó el 7 de septiembre de 1822 como cadete, graduándose de subteniente el 1º de septiembre de 1823, carrera en la que alcanzó el grado de capitán el 16 de junio de 1833.

Fue Juan Bolyai un niño de clara inteligencia y de gran temperamento artístico. A los 9 años, tocaba con maestría el violín y a los 13 dejaba admirado a su padre con sus amplios conocimientos (para su edad) de cálculo infinitesimal y mecánica, ciencias en las cuales comprendió con claridad y certeza conceptos difíciles para la mayoría de los hombres.

En 1816 había deseado su padre aprovechar sus grandes condiciones enviándolo a estudiar a Alemania. Escribió W. Bolyai a su amigo Gauss pidiéndole se lo aceptara en su casa para que estudiara dos años bajo su dirección; pero Gauss no respondió jamás a esta carta. Es probable que esta circunstancia haya determinado la elección de la carrera de las armas.

Bolyai era de carácter violento. Fr. Schmidt cuenta que en cierta ocasión desafió a trece oficiales de caballería pidiendo se le concediera tocar un trozo de música en su violín entre duelo y duelo. Aceptada esta proposición se batió con los trece, venciéndolos a todos.

Desde muy joven, e inspirado en las lecciones de su padre, quiso dedicarse a la teoría del paralelismo, desoyendo los consejos de su padre, quien trató de desviarlo de este problema al que él había dedicado sus mejores esfuerzos y a causa del cual consideraba fracasada su vida por no haber encontrado la solución definitiva de él.

Hablando de los consejos que le daba su padre, Juan se expresa:

"...El (mi padre) me hizo notar las

grandes lagunas y lo que había insuficiente en la teoría de las paralelas; me hizo ver que aun procediendo mucho mejor que sus predecesores, no había sin embargo encontrado nada satisfactorio ni conveniente en este sentido en ninguno de sus nuevos axiomas, pues ninguno servía para demostrar rigurosamente el axioma XI, por no tener aquéllos el grado de evidencia geométrica necesaria, por muy evidentes que parecieran a primera vista. El afirmaba sin demostración, sin embargo, que era imposible demostrar el axioma XI y temiendo no sin razón que podía pasar mi vida vana e infructuosamente, se esforzó por todos los medios por desviarme en la continuación de mis investigaciones y de inspirarme horror hacia estas materias.

"Como yo le había escrito desde la Academia Real de Ingenieros de Viena, diciéndole que había entrado en una vía que podía conducirme a la demostración del axioma XI, demostrando que la línea equidistante de una recta es otra recta y que había empezado a desarrollar las propiedades de tal línea en el caso que esta afirmación fuera falsa, me contestó como sigue en una notable carta (la carta falta)"[27].

A pesar de todo, Juan se dedicó por entero a él y en las conversaciones que sostuvo sobre este problema con su amigo Szász aclararon conceptos que más tarde debían servirle en su "Ciencia absoluta del espacio".

En 1823 Juan penetra en el verdadero camino concibiendo un sistema análogo al de Gauss y al de Lobatchefsky. En efecto, el 3 de noviembre de 1823 escribe a su padre una carta dirigida desde Temesvar, manifestándole que ha logrado su propósito creando un nuevo sistema y demostrando, en consecuencia, la imposibilidad de demostrar el axioma XI.

Esta carta escrita en lengua magiar, encontrada entre la documentación de Wolfgang y traducida por el profesor Martín Schmidt, dice en una de sus partes:

"Estoy decidido ahora a publicar una obra sobre la teoría de las paralelas en cuanto haya puesto los materiales en orden y las circunstancias me lo permitan. No lo he hecho todavía, pero la vía que he seguido, ha ciertamente por decirlo así, casi alcanzado el propósito, el propósito mismo no está alcanzado; pero he descubierto cosas tan bellas que me he quedado sorprendido, y habría sido lamentable que se hubieran perdido. Cuando lo veais lo reconoceréis vos mismo. Mientras tanto, no puedo deciros otra cosa que ésta: de la nada he creado un nuevo universo. Todo lo que os he comunicado hasta ahora no es sino un castillo de papel comparado a esta torre. Estoy tan persuadido que esto me dará gloria como si ya hubiere acaecido".

Juan envió este trabajo a varias personas. En 1825 le envió a su ex profesor de la Academia de Ingenieros, Juan Wolter von Eckwehr, un manuscrito en que le exponía los principios de su sistema. En 1829 se lo envió a su padre, con el cual se entendió para los efectos de su publicación. Wolfgang, aun cuando no pudo comprender cómo podían entrar en sus cálculos algunas constantes indeterminadas, lo publicó en su obra Tentamen que tenía en preparación, como Apéndice al tomo I. Este Apéndice lleva el siguiente título:

"La ciencia absoluta del espacio", inde-
" pendiente de la verdad o falsedad del
" axioma XI de Euclides (que jamás podrá
" establecerse a priori), seguido de la cua-
" dratura del círculo en el caso de la false-
" dad del axioma XI. Por Juan Bolyai,
" capitán del Cuerpo de Ingenieros del
" Ejército austríaco".

Esta obra apareció en 1832 y fue enviada inmediatamente a Gauss a petición de Juan, en carta de 20 de junio de 1831 (esto se debió a que el Apéndice se imprimió primero y se le envió este opúsculo a Gauss).

En efecto, desde Maros Vasarhely le escribe:

"Mi hijo es ya teniente del Primer Cuerpo de Ingenieros y será luego capitán; es un bello muchacho, un virtuoso del violín, es fuerte en esgrima y un militar todavía impetuoso; pero también un perfecto caballero. Es apasionado por las matemáticas y posee para ellas aptitudes de espíritu especiales. Ahora se encuentra en la guarnición de Lemberg; tiene por ti gran veneración y es capaz de comprenderte y apreciarte. A petición de él te envío este pequeño opúsculo, del cual es autor, ten la bondad de juzgarlo y en la respuesta que espero impaciente escríbeme francamente . . .".

La carta llegó a su destino pero el Apéndice no. Como Wolfgang no recibiera respuesta se lo envió nuevamente y cuyo envío se lo anuncia por carta del 16 de enero de 1832. La respuesta de Gauss, ya la cono-

---

[27] Este fragmento pertenece a una autobiografía de Juan, y que Franz Schmidt ubica entre 1840 y 1851.

cemos (pág. 43, carta del 6 de marzo de 1832).

Al conocer la respuesta de Gauss, Wolfgang le dice lleno de contento a su hijo: "La respuesta de Gauss respecto a tu obra redunda en honor de nuestra patria y de nuestra nación". Un efecto completamente contrario produce esto en Juan Bolyai, quien tuvo durante toda su vida una injusta aversión al eminente geómetra, creyendo que éste se había aprovechado de sus investigaciones robándole un justo título de gloria. Sin embargo, los años posteriores debían convencerlo que estaba en un error, lo que no hizo cambiar su actitud hacia Gauss. Por esta misma razón guardó resentimiento a su padre, pensando que éste se había anticipado a comunicar sus investigaciones.

Fue Juan Bolyai un espíritu claro y sutil. En 1848 al conocer la "Geometría Imaginaria" de Lobatchefsky, se ocupó de ella con interés de crítica y a objeto de superar al geómetra ruso se dedicó a componer una gran obra sobre los principios de las matemáticas, obra que no llevó a cabo[28].

A excepción del Apéndice, Juan Bolyai no publicó nada más, dejando eso sí varios manuscritos que deben contener valiosas investigaciones y que están depositados en la Biblioteca de Maros Vasarhely. En los últimos años de su vida se ocupó casi exclusivamente de lingüística. Había emprendido la gigantesca tarea de crear una lengua universal. Los papeles encontrados demuestran que en 1853 tuvo la intención de publicar algunas investigaciones matemáticas sobre cantidades imaginarias. Una hoja encontrada entre sus documentos contiene el título de una obra en proyecto sobre una nueva doctrina de las cantidades imaginarias.

Murió en Maros Vasarhely en 1860.

Bolyai como lo hiciera Lobatchefsky empieza su obra negando el postulado euclídeo al suponer que por un punto fuera de una recta pasan dos rectas que no cortan a la dada y que hacen con la perpendicular bajada del punto a la recta dos ángulos agudos y a las cuales llama paralelas.

He aquí la figura de Bolyai y la definición que da de paralela:

Si la recta am no está cortada por la recta bn situada en el mismo plano; pero que esté cortada por otra recta bp comprendi-

[28]R. Bonola: "Geometrías no euclidianas", pág. 110.

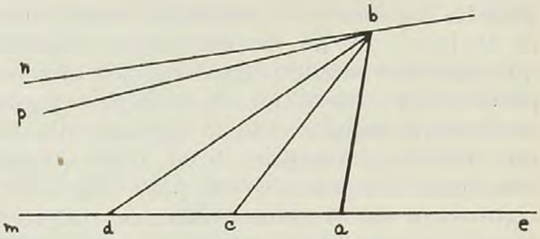

Figura 17

da en el ángulo abn, se dirá que bn es paralela a am.

A continuación demuestra las propiedades de conservación, reciprocidad y transitividad del paralelismo y enuncia una serie de teoremas tanto de la geometría del plano como del espacio. Estudia también algunas propiedades aplicables tanto al sistema euclídeo como al suyo, sistemas que designa simbólicamente por Σ y S, respectivamente.

Al igual que Lobatchefsky y Gauss llegó a la curva que se obtiene cuando el radio de la circunferencia crece más allá de cierto límite (paraciclo de Gauss u oriciclo de Lobatchefsky) y que designó con la letra L y a la superficie correspondiente por F (paraesfera y orisfera), como también la curva equidistante de una recta dada (hiperciclo).

La obra de Bolyai es una exposición completa de la nueva geometría. En ella desarrolla la geometría del plano y del espacio, la trigonometría y la analítica.

Para deducir sus fórmulas trigonométricas Bolyai aprovecha la figura siguiente:

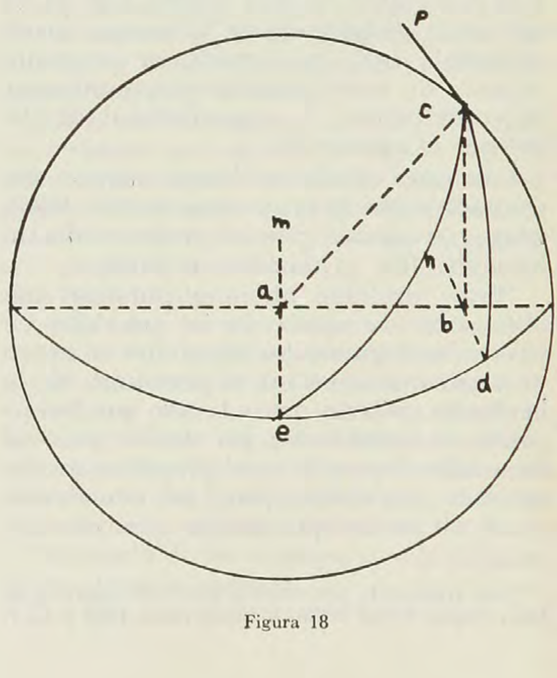

Figura 18

Sean tres planos que se cortan según rectas paralelas am, bn y cp y el triángulo rectilíneo rectángulo abc y cortemos este sistema por la superficie límite F; obtenemos el triángulo límite rectángulo cde (la superficie F corta las prolongaciones de am y bn en e y d, respectivamente).

Bolyai se apoya en seguida sobre los resultados siguientes:

1) La proposición que la periferia del círculo en la superficie límite coincide con la periferia del círculo en el plano no euclidiano. De ella deduce a continuación este teorema sencillo y elegante que le permite dar con la clave de sus fórmulas: "En un triángulo rectilíneo las circunferencias de radio igual a los planos son entre sí como los senos de los ángulos opuestos".

2) La proposición que sobre la superficie límite (F) es válida la geometría ordinaria.

3) La fórmula que expresa la relación entre dos arcos de líneas límites:

$$Y = X^{\frac{y}{x}}$$

Finalmente logra la fórmula que relaciona esta última función Y y el ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia entre ellos: $Y = \cot \frac{u}{2}$ fórmula fundamental de su trigonometría.

Bolyai dedujo también algunas proposiciones que podían aplicarse tanto al sistema S como al Σ y forman parte de lo que él llama *geometría absoluta*.

Al final de su obra aborda el problema de la indemostrabilidad del axioma XI, en lo que no anda tan feliz como en lo anterior de su obra y termina con el problema de la cuadratura del círculo que en su sistema geométrico tiene solución, lo que llevó a Bolyai a decir: "O el axioma XI de Euclides es verdadero o es posible la cuadratura del círculo".

En su obra están también contenidas las primeras construcciones no euclidianas como, por ejemplo, trazar por un punto y a través de él las paralelas a una recta dada.

Las investigaciones de los geómetras que hemos citado demostraron en forma definitiva la indemostrabilidad del V postulado al edificar un sistema geométrico, lógicamente coherente e independiente de él. Este sistema equivalente a la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri, hizo cambiar en forma radical los conceptos clásicos sobre los fundamentos de la geometría y agrandó la visión de los matemáticos hacia pensamientos de nuevas trayectorias. Ahora se comprendía claramente que era posible edificar tantos sistemas geométricos como conjuntos de axiomas independientes y suficientes para constituirlo, pudieran formarse. Hacia los principios y conceptos fundamentales de esta ciencia se volvieron, pues, las miradas de los geómetras. Riemann comprendió claramente que la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri daba origen a otra geometría si se rechazaba el postulado VI o axioma XII y si se abandonaba la hipótesis de la recta abierta e infinita. En su célebre Memoria "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría", leída en presencia de Gauss, desarrolla su nueva geometría equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso y en la cual por un punto situado fuera de una recta no pasa ninguna paralela a ella y en que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

Finalmente, Sophus Lie, Hilbert, Dhen y otros han llegado, rechazando el postulado de Arquímedes y dando a la noción de recta un carácter conveniente para cada caso, a una serie de nuevas geometrías que se conocen con el nombre de no arquimedianas (geometría semieuclidiana, no legendriana, etc.).

La geometría de Lobatchefsky-Bolyai encontró felizmente adeptos tan eminentes como Poincaré y Höüel en Francia. Este último tradujo las obras de Lobatchefsky y Bolyai, contribuyendo por todos los medios a su alcance a la difusión del nuevo sistema. En 1867 publicó su famoso "Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire" y varios artículos sobre el V postulado y los resultados a que habían llegado los nuevos investigadores, estudios éstos que aseguraron definitivamente su triunfo.

En Italia, Battaglini hizo del Giornale di Matematica[29] el órgano de propaganda de la nueva geometría y contribuyó con un interesante estudio a constituir en forma sólida los fundamentos de la trigonometría lobatchefskiana, partiendo de las figuras inmediatamente realizables (1867) y que más tarde hizo Gerard en forma completa en una célebre memoria de tesis. Beltrami con su famoso estudio "Ensayo de interpretación de la geometría no euclidiana", publicado en 1868, en que demuestra que la planimetría de Lobatchefsky es realizable en el plano de una superficie de curvatura

[29] R. Bonola: Geometrías no euclidianas, pág. 123.

constante negativa que llamó Pseudoesfera, vino a esclarecer en forma brillante la verdadera naturaleza de los fundamentos de la geometría. Posteriormente, han desarrollado obras de valiosa divulgación y de profundos estudios de investigación B. Forti, F. Enriques y R. Bonola, contribuyendo al pulimiento definitivo de esta rama.

En Estados Unidos cabe citar la gran obra realizada en este sentido por G. Bruce Halsted, y en Bélgica por Mansion.

En cuanto a la historia de este nuevo sistema, Stäckel y Engel en Alemania, y Fr. Schmidt, han hecho una obra completa y acabada.

Finalmente, podemos agregar que la geometría métrico-diferencial, la geometría proyectiva y la teoría de los grupos han dado nuevos caminos y permitido obtener una visión muy completa de la naturaleza y propiedades que caracterizan los diferentes sistemas geométricos, estudios que han permitido constituir sistemas más amplios y generales en que los espacios euclidianos y no euclidianos son sólo casos particulares de otros sistemas más generales.

RESULTADOS GENERALES DE LA GEOMETRIA LOBATCHEFSKY-BOLYAI

Deseo terminar este bosquejo resumiendo los resultados generales que se obtienen en la Geometría Lobatchefsky-Bolyai, llamada también geometría hiperbólica.

Ya hemos dicho que esta disciplina se obtiene dejando todas las proposiciones fundamentales de la geometría clásica excepto el postulado de las paralelas que puede sustituirse por el siguiente:

Si se tiene una recta L y un punto A fuera de ella, a través de A pasan hacia ambos lados dos rectas paralelas e infinitas no secantes.

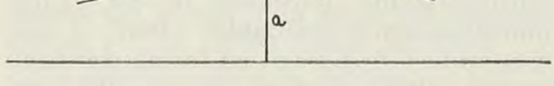

Figura 19

El ángulo φ se llama ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia a, y se simboliza por la expresión π (a) en que π es una función. Este ángulo está determinado por la expresión:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi(a) = e^{-\frac{a}{k}}$$

o también, por ejemplo: cos π (a) = tgha.

Se mantiene en esta geometría las propiedades de conservación, reciprocidad y transitividad del paralelismo y, en cambio, se demuestra el carácter asintótico de las paralelas.

Los teoremas más importantes de la planimetría pueden resumirse en los siguientes:

TEOREMA: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180°.*

A la diferencia entre la suma de los ángulos interiores de un triángulo y 180° se le llama *deficiencia* y puede establecerse el siguiente.

TEOREMA: *Las áreas de dos triángulos son proporcionales a sus deficiencias.*

En relación con las simetrales de un triángulo se puede establecer el siguiente teorema:

TEOREMA: *Las tres simetrales correspondientes a los lados de un triángulo son paralelas si dos de ellas lo son.*

En esta geometría no existen figuras semejantes, o sea, en otras palabras, los triángulos que tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales son congruentes. Esto se expresa en el teorema siguiente:

TEOREMA: *Dos triángulos semejantes son congruentes, o en otros términos la semejanza no existe.*

¿Hay algún punto de conexión entre el sistema geométrico euclidiano y el lobatchefskiano? o lo que es lo mismo ¿son sistemas de igual categoría espacial o a la inversa alguno de ellos tiende bajo ciertas condiciones hacia el otro? El siguiente teorema nos da la respuesta a esta cuestión:

TEOREMA: *La geometría euclidiana es el límite hacia el cual tiende la geometría lobatchefskiana cuando las dimensiones de las figuras tienden a magnitudes infinitamente pequeñas en relación con la unidad natural de longitud.*

LA TRIGONOMETRIA LOBATCHEFSKIANA

La Trigonometría la deduce Lobatchefsky de la superficie hipotética que llama *orisfera.* Bolyai toma otro camino deduciendo una trigonometría absoluta. Sin embargo el método más completo lo da Gérard, el cual deduce las relaciones que corresponden a un triángulo lobatchefskiano examinando las funciones que satisfacen estos lados.

Las relaciones a que se llegan son las que corresponden a funciones hiperbólicas. Así tenemos:

$$\operatorname{sen} h\frac{a}{k} : \operatorname{sen} h\frac{b}{k} : \operatorname{sen} h\frac{c}{k} = \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma$$

y también:

$$\cos h\frac{a}{k} = \cos h\frac{b}{k}\cos h - \frac{c}{k}\operatorname{sen} h\frac{b}{k}\operatorname{sen} h\frac{k}{c}\cos\alpha$$

Bolyai da un teorema de una sencillez y elegancia admirables, en que relaciona los lados de un triángulo con los senos de los ángulos opuestos. Esta proposición la enuncia Bolyai bajo el siguiente teorema:

En un triángulo rectilíneo las circunferencias de radio igual a los lados son entre sí como los senos de los ángulos opuestos.

$$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \operatorname{Sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma$$

También se establece que la Trigonometría esférica es independiente del postulado de las paralelas (No 26 Appendix de Bolyai).

Finalmente diremos que si en las fórmulas de la Trigonometría esférica se sustituyen los lados reales por imaginarios, o lo que es lo mismo se considera un círculo de radio imaginario, las fórmulas se convierten en las correspondientes de la geometría lobatchefskiana.

LA CONSTRUCCION NO EUCLIDIANA. LA CUADRATURA DEL CIRCULO. CURVAS TIPICAS DE LA GEOMETRIA DE LOBATCHEFSKY

Es indudable que un sistema geométrico debe tener la posibilidad de poder construir sus figuras y aun cuando la naturaleza de este trabajo no nos permite extendernos en este aspecto no podíamos dejar al menos de decir que hay procedimientos para trazar desde un punto fuera de una recta una paralela a ella. Sería superfluo agregar que dicha construcción realmente sólo podría efectuarse en el plano no euclidiano y que lo que se obtiene es el método que a uno le muestra cómo se efectúa esta construcción no dejando ninguna duda desde el punto de vista racional.

En este campo de las construcciones, es también posible construir el segmento correspondiente a un ángulo de paralelismo dado. Con él Bolyai da una construcción de un cuadrado de área igual a la del triángulo máximo de donde pasa a la construcción de un círculo de área igual a la de un cuadrado. En otros términos en este sistema geométrico *es posible la cuadratura del círculo.*

Entre las curvas típicas de este sistema geométrico tenemos el *oriciclo* y la superficie correspondiente *orisfera* que equivalen en la geometría euclidiana a la recta (circunferencia de radio infinito) y al plano (esfera de radio infinito). Tenemos también el *hiperciclo* lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta y la superficie correspondiente la *hiperesfera.*

Finalmente diremos que la longitud de una circunferencia se obtiene con la expresión: $L = 2\pi \operatorname{Sen} h R$ o también:

$$L = \pi K \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{\frac{-r}{k}}\right)$$ [30]

Y el área del círculo mediante:

$$S = 2\pi k^2 \left(\cos h\frac{r}{k} - 1\right)$$

Así también tenemos para la superficie de una esfera:

$$S = 4\pi \operatorname{sen}^2 h R$$

Y para el área lateral de un hiperciclo de revolución:

$$S = 2\pi H \operatorname{sen} h R \cos h R$$

En la Analítica lobatchefskiana la ecuación de una línea es:

$$\cos\alpha\ \operatorname{tg} i\, x + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{tg} i\, y = \operatorname{tg} i\, p.$$

y la ecuación de una circunferencia:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 i\, x + \operatorname{tg}^2 i\, y)(1 + \operatorname{tg}^2 i x' + \operatorname{tg}^2 i\, y') \cos^2 i\,\delta = (1 + \operatorname{tg} i\, x \operatorname{tg} i\, x' + \operatorname{tg} i\, y \operatorname{tg} i\, y')^2.$$

---

[30] Las expresiones varían aparentemente de forma, según sea la constante; pero sin equivalentes.

Lo que hemos mostrado ha tenido sólo el ánimo de hacer ver que el sistema es completo, coordinado y lógico. No tendría objeto continuar dando fórmulas cuando no se ha desarrollado sistemáticamente la materia. Tampoco podíamos dar un esquema de la gestación de la idea sin enunciar algunas de las conclusiones a que dio origen la elaboración de la misma. Lo importante es que sabemos ahora que el sistema es lógicamente posible. Si el espacio lobatchefskiano existe físicamente o sólo tiene una existencia lógica es otro problema, eso sólo lo sabremos el día en que el hombre conozca la realidad espacial del Universo en que vive. Lo fundamental es que así como en el espacio euclidiano se ha construido un sistema coherente, también en el espacio de Lobatchefsky se puede construir un sistema coherente, sin contradiciones internas. No importa que no podamos construir las figuras en su verdadera forma, basta que racionalmente sepamos que es posible efectuar tal construcción.

Por último nos asomaremos, aunque sea de soslayo, al edificio geométrico mismo para observar algunas de sus características y ver cómo por ellas podemos interpretarlo a través de una imagen de nuestra estructura espacial.

ESTRUCTURA DEL ESPACIO LOBATCHEFSKIANO

Del espacio en que se verifica la geometría de Lobatchefsky-Bolyai sólo conocemos propiedades, su arquitectura escapa a la captación intuitiva nuestra. Se sabe por ejemplo que la recta, como en la geometría euclidiana está determinada por dos puntos y es infinita y que el plano está determinado por tres puntos no colineales, o sea, que estos elementos conservan las mismas características que ellos tienen en el espacio euclídeo, en otros términos, conocemos sus huellas pero no su forma. Indudablemente está contra nuestra realidad sensorial imaginar dos rectas paralelas asintóticas y que conserven las características de las rectas euclidianas. Para tener una imagen se recurre a especies de diccionarios, en que un concepto de un elemento geométrico euclidiano se define arbitrariamente de una manera conveniente, así tendremos que el teorema que se obtiene con los términos de una columna equivale a una proposición de la geometría ordinaria, mientras que traducido a los términos de la otra columna equivale a un teorema de la nueva geometría. Tal se ha hecho con la Geometría de Lobatchefsky como con la de Riemann. En las obras de H. Poincaré encontramos este sistema y así como en las obras de este matemático francés, en numerosos estudios y obras sobre esta materia.

Beltrami dio una imagen más objetiva con su Pseudoesfera, o sea, la superficie de curvatura constante negativa que se obtiene al hacer girar en torno de su eje la curva llamada *tractriz* y que satisface la relación:

$$M\,\omega.\,MN = -MT^2 = -a^2$$

y que puede definirse como la curva en la cual el segmento de tangente a ella comprendida entre el punto de tangencia y un eje dado es constante.

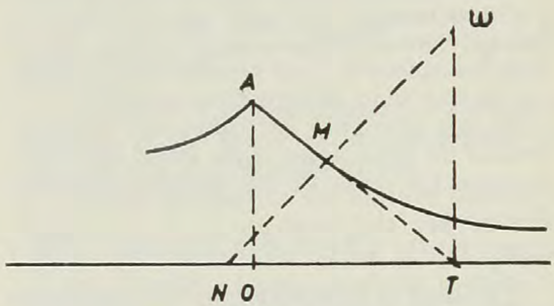

Figura 20

En la superficie de la Pseudoesfera se verifican las relaciones lobatchefskianas. Así podemos pues formarnos una imagen objetiva de este mundo geométrico extraño a nosotros, pero cuya existencia ha descubierto el hombre, o mejor dicho ha creado, llevado por la inquietud incesante de su espíritu.

Voy a proponer todavía una interpretación de la goemetría de Lobatchefsky a través de un concepto que definiremos y que podemos llamar *magnitud aparente de un trazo* y al sistema podemos designarlo con el nombre de *Geometría Visual.*

Si K es una constante que representa un trazo unidad y φ el ángulo formado por las

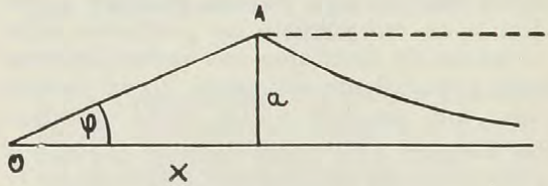

Figura 21

visuales de un observador a los extremos de un trazo, se llama magnitud aparente del trazo a la expresión:

$$\mu = K \operatorname{tg} \varphi$$

Si consideramos un observador fijo O y un trazo que se desplaza paralelamente a sí mismo a lo largo de la recta OX el extremo del trazo describe una rama de hipérbola. En efecto de la relación:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{x}$$

siendo a y K constantes y μ y x variable, la curva $\mu \cdot x = a \cdot K$ representa una hipérbola equilátera. Toda línea que pasando por A se encuentre entre la rama hiperbólica y la paralela euclidiana será una no secante.

Hemos querido dar una idea de la evolución que ha experimentado a través del tiempo el concepto de axioma o postulado. El proceso debía ser lento y no podía ser de otra manera. Los axiomas o postulados considerados como proposiciones de contenido eterno e inamovible adquieren de pronto una naturaleza un tanto variable, sujetas a cierta relatividad; pero que en nada hace cambiar la solidez granítica de los templos geométricos.